Math. P.
H3y6

<36622205040010

<36622205040010

Bayer. Staatsbibliothek

Ar

in's

für die

J. G. Brandels

[A]rithmetik

[f]ür's Kurze gefaßt,

und

für die allererſten Anfänger auf das

deutlichſte vorgetragen.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

München, 1796.

Bey Joſeph Lentner.

Nro 1500.

Prändels Arithmetik ins Kurze gefaßt.

Imprimatur.

Sigmund Graf von Spreti,
Präsident.

München im churfürstl. Censur-Collegio den 23. Dezember 1795.

Regiſtr. Fol. 184.

Christoph von Schmöger,
Oberlandesregierungs- und Censur-Collegii-Sekretär.

Bayerische

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorrede.

uszüge oder sogenannte Kompendien größerer
Lehrbücher, zumal von den Verfassern der-
selbst ausgefertiget, sind gewiß in manchem
trachte sehr nützlich. Der Anfänger irgend
Kunst oder Wissenschaft pflegt gar gerne bey
Anblicke vielfassender Schulbücher, und dieß
glich bey der Rechenkunst, den Muth zu ver-
: man muß ihm daher allererst ein kleiners
chen in die Hände spielen; welches aber im-
n die Beschaffenheit haben soll, daß es die
egierde der aufmerksamen Jugend, anstatt zu
en, vielmehr reitzet, und sie anspornt, eine
ändigere Anweisung darüber zu Gesichte zu be-
en. Man wünscht auch öfters nach der Hand,
ein starkes Lehrbuch ganz durchstudiert ist,

das daraus Erlernte, wie in einer Nußschale, beysamm zu haben, damit man es in spätern Jahren bequem nachholen könne. Manchmal hat der Schüler, der sich mit den vollendeten Vorbereitungsklassen dem gemeinen Bürgerstande widmet, ein ausführlicheres Werk nicht einmal nöthig, und ist daher gut, bloß so viel gelernt zu haben, als die Bedürfnisse seines Berufes fodern.

Ich habe hier nichts weiter zu erinnern, als daß ich den äußern Zuschnitt der mathematischen oder scientivischen Methode verlassen, und der Verständlichkeit zu liebe den erzählenden Vortrag gewählet: daß ich, so wie in meiner größern Arithmetik, alle algebraförmigen Lehrsätze und Beweise, worauf sonst die Regel Detri und reesische Regel gebaut zu werden pflegt, geflissentlich wegließ, und sie einsweilen auf Induktion gründete; weil ich aus vieljähriger Erfahrung mehr als überzeugt bin, daß man den größten Theil der kleinjugendlichen Zuhörer durch dergleichen saftlose und fürs Knabenalter unpassende Demonstrationen die Zuneigung für die Mathematik ein für allemal benimmt, und sie zu lebenslänglichen Feinden dieser göttlichen Wissenschaft macht: daß ich ferner die hinreichend erwiesnen Re-

gelu

Vorrede.

jedes Hauptartikels zulezt allemal ins Kurze
e, darüber zum Behuf des Lehrers Fragen aus-
e, und zur Uebung neue, angemessene und sach-
tnißvolle Exempel sammt ihren Kalkul anhängte:
ich endlich die Handlungsrechnung ganz aus
m kleinen Kompendium ausschloß; weil ich sie
Theils für dieses Alter zu schwer hielt; andern
ls aber glaubte, daß von dieser Hauptanwen-
der Arithmetik in Zukunft eben so wenige
üler Gebrauch machen dörften, als z. B. von
Geometrie, in so fern selbe die Grundlage der
tischen Meßkunde ist.

Die hierin mit untergestreuten Beyspiele langen
ch nicht aus, einen Anfänger zum taktfesten
ner in bürgerlichen Fällen zu bilden: aber jeder
e Lehrer ist leicht im Stande, eine Menge ähn-
zu entwerfen. Uebung ist und bleibt allerdings
meinem Urtheile das einzige Mittel, bey der
nd einen festen Grund zur Mathematik zu le-
Ist sie einmal bloß in mechanischer Anwen-
der praktischen Regeln stark geworden, dann
man ihr allemal bey aufwachender Fassungs-
die Gründe dieser oder jener Verfahrungsart
ngen. Knaben sind keine Männer, die die

Ge-

Gewohnheit haben, nicht einen Schritt weiter zu gehen, ehe sie die völlige Ursache desselben im Voraus einsehen; sondern sie geben sich in ihren erstern Jahren allzugerne zufrieden, wenn sie bloß wissen, wie man die Sache anzugehen habe, unbekümmert, warum dieß gerade so und nicht anders geschehen müsse. Wer mehr von Knaben fodert, der überspannt die Natur, er mag sich entschuldigen, und seine Methode vertheidigen, wie er wolle.

Schriebs

München den 17ten Oktober
1795

der Verfasser.

Inhalt

der abgehandelten Artikel.

§. 1.

Seite

obegriffe von Rechenkunst, Zahl und Ziffer, dann
on Aussprechung und Anschreibung der Zahlen 1

§. 2.

en Rechnungsarten, und zwar erstens von der
ddition . . . 8

§. 3.

er Multiplikation . . 15

§. 4.

er zwoten Hauptrechnungsart der Subtraktion 25

§. 5.

r Division . . . 31

§. 6.

n und Subtraktion mit Unterabtheilungsbenen-
ngen . . . 43

§. 7.

Seite

§. 7.

Von gebrochnen Zahlen und ihren Rechnungsarten 48

§. 8.

Von der Regel Detri 65

§. 9.

Von der reesischen Regel . . 91

§. 10.

Von der Gesellschaftsrechnung . . 125

---

§. 1.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

§. 1.

ndbegriffe von Rechenkunst, Zahl
d Ziffer, dann von Aussprechung und Anschreibung der Zahlen.

echenkunst, oder mit ihrem griechischen Name, Arithmetik ist die gründliche Fertigkeit, aus nten Zahlen solche unbekannte zu finden, deren e oder Kleinheit völlig von selben abhängt. heißt aber jede Sammlung, jede Zusammstel: von Einheiten, und Einheit endlich ist jene schaft der Dinge, wodurch sie sich entweder einander im Raume oder nacheinander in it denken — vorstellen lassen.

Eine Einheit wird im Deutschen eins genennt, st der Anfang der Zahlen. Ein Paar Ein: oder eins und eins heißt zwey. Kömmt zu Einheiten noch eine hinzu, so nennt man's . s. w. Allein beym Schreiben wäre diese hnung ungemein mühsam; man hat daher

eigne Karaktere dazu gewählt, welche man Ziffer heißt. Wir haben nur zehn solcher Zeichen, und es hieng anfänglich von der Willkühr der Menschen ab, mehr oder weniger derley Zeichen zu wählen. Vielleicht mag die Anzahl unsrer Finger, woran wir so gerne zählen, Anlaß gegeben haben. Sie sehen so aus: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 0, welches letztere Zeichen Null heißt, und den Mangel einer Einheit oder Zahl anzeigt.

*) Wie die heut zu Tag üblichen Zifferformen in Arabien ihrem Mutterlande entsprungen seyn mögen, ist in meiner größern Arithmetik §. 9. sattsam erörtert, und mag daher, wegen der Neuheit meines Gedankens, dort nachgesehen werden.

Aber was nützen uns die zehn Zahlzeichen, wenn wir nicht mehr als neun Einheiten dadurch auszudrücken vermögen? Auch hierinnfalls hat man Verfügnngen getroffen, die uns in Stand setzen, die größten Zahlen auf eine sehr kurze Art niederzuschreiben. Man hat bey den Ziffern eine gewisse Rangordnung festgesetzt, kraft welcher sie immer zehnfach mehr gelten können. Diese Rangordnung wächst gemäß der morgenländischen Schriftsitte von der Rechten zur Linken bey jeder Zifferstelle. Oder wenn wir uns einbilden, daß die Ziffer, so zu reden, ihr Gesicht gegen uns kehren, so kann man auch sagen, daß ihre Rangordnung von der Linken zur Rechten steige. Wir wollen bey der ersten Annahme bleiben. Wenn ich demnach zehn Einheiten bezeichnen soll, so gebe ich dem Einser durch Beysetzung eines Nulls zur Rechten eben darum die zwote Rangstelle zur Linken, und er wird unter dem Ausblicke (10) zehn gelten. Will ich neben zehn noch eins, zwey oder drey Einheiten u. s. w. ausdrücken,

en, so darf ich so ein Ziffer nur statt dem hinsetzen, z. B. 11, 12, 13, u. s. f.

Diese zweyzifferichten Zahlen haben das Beson- daß man sie nach Morgenländerart liest, und intere Ziffer zuerst nennt, dann erst das vor- z. E. die Zahl 57 wird durch sieben und g gelesen. Nur die Zahlen 11 und 12, wel- alogisch einzehn und zweyzehn heißen soll- achen die Ausnahme, daß man die erste durch Wort eilf, und die zwote durch zwölf aus- .

Man kann durch zwo Zifferstellen nicht mehr iten ausdrücken als neun und neunzig, 99. Daher setzt man Ziffer in die dritte stelle zur Linken, und hier gelten sie zehnmal als in der zweyten, nämlich hundert.

Es heißt demnach z. E. die Zahl 718 in Wor- benhundert und achtzehn, 801 achthundert ins u. s. w. Der vierte Zifferrang hat die nung tausend, der fünfte zehntausend. Diese Zifferstellen werden, wie so eben vorher er- worden, rückwärts zusammgelesen. Nachher hunderttausend, Millionen, zehn Millio- hundert Millionen u. s. f. bis zur 13ten elle, wo man Billion sagt, welches so viel s millionmal Million; bey der 19ten Tril- das heißt, nach sechs Zifferstellen kömmt alle- ieder eine neue Benennung vor, welche alle en lateinischen Zahlwörtern leicht abzuleiten als Quatrillion, Quintillion, Sextillion, lion, Oktillion, u. s. f. Hier kann man die mit einemmale überblicken.

2	Einheiten
2	Zehner
9	Hunderter
6	Tausender
1	Zehntausender
4	Hunderttausender
4	Millionen
7	Zehnmillionen
7	Hundertmillionen
5	Tausendmillionen
6	Zehntausendmillionen.
2	Hunderttausendmillionen
9	Billionen
0	Zehnbillionen
8	Hunderbillionen
4	Tausendbillionen
6	Zehntausendbillionen
7	Hunderttausendbillionen
5	Trillionen u. s. f.

Man liest diese Zahl gemäß dem Sprachgebrauche auf folgende Art: Fünf Trillionen, siebenhundert vier und sechzigtausend achthundert neun Billionen, zweyhundert fünf und sechzigtausend siebenhundert und vier und siebenzig Millionen, vierhundert sechzehntausend, neunhundert zwey und zwanzig.

Aus dem bisher Gesagten lassen sich nun leicht die wenigen Regeln abziehen, wie jede geschriebne Zahl, die aus mehr als einem Ziffer besteht, ausgesprochen werden müsse. Ich will sie in's Kurze fassen, und hieher setzen.

1) Zweyziffrichte Zahlen werden rückwärts gelesen, daß heißt, das Ziffer der Einheiten zur Rechten, wenn es kein Null ist, wird zuerst gesprochen und dann jenes der Zehner. — 63, drey und sechzig. 70, siebenzig. 88, acht und achtzig.

2) Bey Zahlen von dreyen Ziffern wird das erste Zahlzeichen zur Linken, nämlich das Hunderterziffer zwar allererst gelesen, aber die beyden übrigen [illegible] wieder die obige erste Regel. — 327, drey-

hundert sieben und zwanzig. 500, fünfhun-
. 907, neunhundert und sieben.

3) Haben die Zahlen 4 Ziffer, so spricht man
vor den Hunderten die Tausender; die übrigen
ln bleiben wieder. — 2164, zweytausend
undert vier und sechzig. 6000, sechstausend.
, neuntausend und vier.

4) Weil bey fünf Ziffern Einheiten und Zeh-
om Tausenderrang vorausgehen, so müssen diese
Ziffer mehrmals rückwärts gelesen werden. —
4, ein und dreyßigtausend neunhundert vier
zwanzig. 40000, vierzigtausend. 60908,
gtausend neun hundert und acht.

5) Bey sechsziffrichten Numern zählt das erste
zur Linken Hunderter im Tausenderrange; folg-
est mans vor den Einheiten und Zehnern der-
. — 592663, fünfhundert zwey und neun-
usend sechshundert drey und sechzig. 700000,
hunderttausend oder siebenmal hunderttau-
303040, drey hundert drey tausend und
3.

) Das erste Zahlzeichen siebenziffrichter Zah-
einen Millionwerth, und wird auch vom An-
gelesen. — 5614119, fünf Millionen, sechs-
rt vierzehn tausend, einhundert neunzehn.
00, zwey Millionen. 6000340, sechs
nen, dreyhundert vierzig.

) Bey Zahlen von mehr als sieben Ziffern wer-
se gegebnen Regeln bis zur Billion, von da
r Trillion u. s. f. ordentlich wiederholt. —
990, ein und vierzig Millionen, dreyhun-
vey und sechzigtausend, neunhundert neun-
zig.

zig. 5449000000, fünftausend vierhundert neun und vierzig Millionen. 604000902610500, sechshundert vier Billionen, neunhundert zwey Millionen, sechshundert zehntausend fünfhundert.

Man thut sehr wohl, wenn man den Anfängern zu lieb die Hauptrubriken Millionen, Billionen, Trillionen u. s. f. durch dazwischen gesenkte Linien und darauf gesetzten Strichchen von sechs zu sechs Ziffer kennbar macht, dann überall Einheiten und Zehner wegen dem Rückwärtslesen zusammstreicht, und die Hunderter von unten, so wie Tausender von oben mit einem Punkte bezeichnet, ungefähr auf diese Art:

```
'''     ''     '
56|440263|900462|941200
```

56 Trillionen, 440263 Billionen, 900462 Millionen, 941 Tausend 200.

Auch in Fällen, wo angegebne oder mit Worten geschriebne Zahlen durch Ziffer ausgedrückt werden sollen, leisten diese Senkstriche gute Dienste. Man ziehe nämlich so viel solcher Linien, als die höchste Hauptrubrik der Zahl fodert, in einer Entfernung von einander, daß immer sechs Ziffer dazwischen Platz haben, so wird man die Zahl leicht nach ihren Hauptbenennungen Million, Trillion u. s. f. in die angewiesnen Fächer einzutheilen im Stande seyn. Es soll z. B. diese Zahl mit Ziffern geschrieben werden: Neunhundert fünf Trillionen, achtzigtausend sechzehn Billionen, dreyßig Millionen, dreyhundert drey. Weil hier die höchste Hauptrubrik

ik eine Trillion ist, so ziehe man drey Senk-
e ungefähr wie hier

```
   '''     ''     '
   |       |      |
```

gebe jedem Fache die gehörigen Benennungen.
Entwurf wird demnach so aussehen.

```
   '''     ''     '
   |       |      |
905|080016|000030|000303.
```

Fragen.

Was versteht man unter Rechenkunst oder Arithmetik?
ist eine Zahl? was eine Einheit? Wie wird eine Ein-
n deutschen Zählen ausgesprochen? wie eins und eins?
ey und eins? u. s. f. Wie drückt man diese Zahlen
hreiben aus, wenn man Zeit und Raum schonen will?
iel haben wir Ziffer? Sind nothwendig nicht mehr oder
er Ziffer? Wie sehen die arabischen Zifferformen aus?
eigt das Null an? Welche Einrichtungen hat man ge-
, um durch die nämlichen Ziffer mehr als neun an-
en zu können? Gegen welche Seite wächst die Rang-
ig der Ziffer? Wie kann man mittels dieser Rangord-
zehn Einheiten bezeichnen? wie zehen und eins u. s. w.
haben diese zweyziffrichte Zahlen besonders? Welche
machen Ausnahm? Welche ist die letzte und größte
ffrichte Zahl? Wie geht die Anschreibung größerer Zah-
r sich? Wie die Ausdrückung derselben durch Worte?
ann die Rangordnung der Zahlen durch einen Entwurf
ulich gemacht werden? Wie heißen die sämmtlichen
beym Aussprechen ordentlich geschriebner Zahlen?
ann man sich helfen, um größere Zahlen sogleich ohne
d lesen zu können? Giebt es nicht auch Vortheile,
ch man diktierte Zahlen sehr geschwind und richtig zu
zu bringen im Stande ist?

Exem-

Exempel.

Wenn die Schöpfung, wie man mit Grunde annehmen kann, bereits 6000 gemeine Jahre zählt, so beträgt das Alter der Welt in Monaten ausgedrückt 72000, in Wochen 312857, in Tagen 2190000, in Stunden 52560000, in Minuten 3153600000, in Sekunden 189216000000, und endlich in Augenblicken, wovon 3 auf eine Sekunde gehen, 567648000000.

Wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre, und ganz aus Wasser bestünde, so würde sie 233950788600320990381400 kölnische Pfunde wiegen; wäre diese Kugel von

Eisen, 1.778.025.993.362 439 526.898.640 Pfund;
wäre sie von Kupfer, 1.988.581.703.102.728.418.241.900 Pfund;
wäre sie von Silber, 2.573.458.674.603.530.894.195 400 Pfund;
endlich vom Golde, 4.445.064.983.406.098.817.246.600 Pfund,
in welchem letztern Fall sie einen Werth von zweytausend vierhundert Quatrillionen, dreyhundert siebenzigtausend vierhundert drey und siebenzig Trillionen, einhundert sechzigtausend einhundert zwey und neunzig Billionen, fünfhundert vier und neunzig tausend zweyhundert acht und zwanzig Millionen, achthundert vierzigtausend Gulden hätte.

§. 2.

Von den Rechnungsarten, und zwar erstens

Von der Addition.

Bis hieher haben wir uns bloß mit der Natur der Zahlen bekannt gemacht, sie aussprechen und anschreiben gelernt; aber noch nichts gerechnet: nun wollen wir auch zu der Art und Weise übergehen, wie man es anzugehen habe, um aus bekannten Zahlen unbekannte zu finden.

Eine

Eine Zahl kann keine weitere Aenderung leiden, daß man eine andere Zahl zu ihr hinzu, oder ihr hinweg thut; das heißt mit andern Worten: Zahlen lassen sich entweder vermehren oder vermindern; zu jeder andern Veränderung sind sie schlechterdings unfähig. Es kann daher in der Arithmetik auch nur zwey Hauptrechnungsarten geben, nämlich die Addition (Vermehrung) und die Subtraktion (Verminderung). Gesetzt auch, es werden manchmal noch andere genennt, so sind es doch im Grunde genommen, nur untergeordnete Rechnungsarten.

Die Addition ist demnach jene arithmetische Verrichtung (Operation) wodurch mehrere gegebne Zahlen in eine einzige Zahl gebracht werden, oder wodurch eine unbekannte Zahl gefunden wird, welche den gegebnen Zahlen zusammgenommen gleich ist. Man heißt diese herausgebrachte Zahl **Summe** und die gegebnen Zahlen die **summierenden Glieder**. Wir wollen das durch ein Beyspiel versinnlichen.

Karl sagt zu Fritzen: „Denken sie einmal wie stark meine Bibliothek ist. Ich habe 13 deutsche Bücher verschiednen Inhalts, 5 Grammatiken, 4 Lexikon's, 15 Klassiker, 9 Dichter, und 3 Rechenbücher". Wenn nun Fritz wissen will, aus wie vielen Büchern Karls Bibliothek besteht, damit er eine Zahl ausfindig machen können, die so viele Einheiten enthält, oder so groß ist, als alle diese gegebnen Zahlen zusammgenommen, und dieß kann er nun addieren.

Wenn wir gegenwärtigem Exempel ein anders unterlegen, so werden wir auch sehen, welche Beschaft die Zahlen haben müssen, daß sie addiert

diert werden können; denn es giebt auch Zahlen, welche sich, als solche betrachtet, lediglich nicht addieren lassen. — Es antworte Fritz z. B. auf Karls Aeußerung so: „Und ich habe in meinem „Bücherkasten 20 Bücher, 12 Kupferstiche, 8 „Schaumünzen, und 5 Erzstuffen; was macht dieß „zusamm"? Solche Zahlen nun, wenn man sie auch wirklich addieren würde, geben am Ende weder lauter Bücher, noch lauter Kupferstiche, noch lauter Schaumünzen u. s. w. Es müssen daher die Zahlen, wenn sie zur Addition fähig seyn sollen, durchgehends schon gleiche Benennung haben, oder doch wenigst so eine allgemeine Benennung, die auf alle verschiednen Benennungen passend ist, zulassen. Z. B. in unserm Exempel Stück, Ding, Sache u. d. gl. Man heißt solche Zahlen, welche einerley Benennung haben, nach der Sprache der Arithmetiker, gleichartig oder auf griechisch homogen; die andern hingegen ungleichartig, — heterogen.

Aber wie wird dann bey gleichartigen Zahlen die Addition wirklich verrichtet? Das wollen wir itzt sogleich lernen. Nur müssen wir zuvor noch ein Paar Wort von einigen hieher gehörigen arithmetischen Zeichen erinnern. Ein aufrechtstehendes Kreutz (+), das zwischen zweyen oder mehrern Zahlen hineingeschrieben ist, bedeutet, daß eben diese Zahlen addiert werden müssen: z. B. 2 + 3 + 1 heißt, man soll 2 und 3 und 1 in eine Summe bringen. Meistentheils wird dieß Zeichen durch plus oder mehr ausgesprochen, obwohl man eigentlich und sagen sollte. Zween gleichlaufende Querstriche bedeuten Gleichheit, z. E. 5 + 1 = 6. Man lieset hier: 5 plus 1 äqual oder gleich 6. Will man die Ungleichheit zwoer Zahlen ausdrücken,

wel-

ches sich zwar in der Arithmetik selten zuträgt,
edienet man sich eines liegenden V, und kehrt
Spitze jener Zahl zu, welche kleiner ist z. B.
4 oder 4 > 3, und heißt: 3 ist kleiner als 4;
4 ist größer als 3.

Zum Addieren selbst braucht man keine andere
bereitung, als daß man die etlichen kleinen
nmen im Kopfe habe, welche was immer für
von den ersten neun Urzahlen vor- und rück-
s miteinander machen können. Ich meine da-
2 + 3 = 5, 3 + 2 = 5, 4 + 8 = 12,
7 = 16 u. s. w. Diese Fertigkeit lernt man
bald durch die Uebung.

Das ganze Geschäft der wirklichen Addition
ht auf den Grundsatz: Das Ganze ist seinen
len zusamm genommen gleich. Die Theile
Zahlen sind aber die Einheiten, Zehner, Hun-
r u. s. f. Es wird daher am besten seyn,
man zuerst die Einheiten aller zur Addition
nen Zahlen in eine Summe bringt, dann auf
e Art auch mit allen Zehnern, Hundertern,
endern u. s. f. verfährt. Folglich soll man
der Addition die Zahlen so untereinander stellen,
Einheiten unter Einheiten, Zehner unter Zeh-
Hunderter unter Hunderter u. s. w. zu stehen
nen. Man kann sie demnach in einer Reihe
ufzählen, ohne so leichtlich irre zu werden.
n die sämmtlichen Einheiten einen oder mehrere
er, so werden selbe zu der nächsten Reihe oder
mne genommen, und das Uebrige angeschrieben.
gleiches versteht sich ebenfalls von der Reihe der
er, Hunderter, Tausender, wenn solche vor-
en sind; weil immer ein Zehnfaches was immer

für

für einer Reihe (Kolumne) ein Einfaches der nächstvorgehenden Reihe zur Linken ist. Die Summe selbst wird meistentheils Ziffer für Ziffer unter die summierenden Glieder gesetzt, doch so daß selbe von ihnen durch eine gezogne Querlinie geschieden wird. Setzen wir, folgende Zahlen sind gleichartig: 744 + 9084 + 23 + 66457 + 21492, so müssen sie erstens einmal folgende Stellung erhalten, und den Unterstrich bekommen:

```
    7 4 4
  9 0 8 4
      2 3
  6 6 4 5 7
  2 1 4 9 2
```

Dann fängt man so zu sprechen an: 2 und 7 ist 9 und 3 ist 12 und 4 ist 16 und 4 ist 20. Es geben aber 20 Einheiten 2 Zehner und keine Einheit; daher wird an die Stelle der Einser das 0 geschrieben, 2 zur nächsten Kolumne gezählt, und so fortgefahren. Die Summe unter dem Zwerchstrich wird daher zu letzt heißen

```
  9 7 8 0 0
```

Noch ein Beyspiel!

```
    5 6 3 2 4
      3 1 0 7
      6 4 3 2
  9 0 0 5 7
      2 2 4 8
  1 5 8 1 6 8
```

Alle Regeln der Addition lassen sich demnach in diese kurze Sätze fassen.

1) Die

1) Die summierenden Glieder müssen gleich-
ige Zahlen seyn.

2) Man stelle die summierenden Glieder so un-
inander, daß Einheiten unter Einheiten, Zeh-
unter Zehner u. s. w. zu stehen kommen, und
ieße die letzte Zahl durch eine Zwerchlinie.

3) Fange bey der äußersten Kolumne zur Rech-
an, sie aufwärts zusammzuzählen, und schreibe
Summe jeder Kolumne, wenn sie einziffricht ist,
r die Linie hin; ist sie zweyziffricht, so wird
rechtsstehende Ziffer derselben Zahl angeschrie-
das Linke aber zur folgenden Kolumne gezählt,
Fall noch eine vorhanden ist; denn ist keine mehr
anden, so wird die Zahl ganz hingesetzt.

) Giebt eine Kolumne allenfalls eine dreyziffrichte Zahl,
ird das rechtsstehende wieder angeschrieben, die beyden
n hingegen in eine Zahl zusammgelesen, und zur näch-
Kolumne gezählt, z. B. 125, wo der Fünfer angeschrie-
Zwölf aber zur nächsten Kolumne geschlagen wird.

Fragen.

Was kann man mit Zahlen eigentlich anfangen, oder
Aenderung leiden Zahlen? Wie viel giebt es demnach
rechnungsarten? Aber es werden hin und wieder auch
andere Rechnungsarten genennt? Was ist Addition?
n Sie mir keinen Fall auf die Bahn bringen, wo Ad-
anzuwenden wäre? Was für eine Eigenschaft müssen
haben, um sie addieren zu können? Wie läßt sich
urch ein Beyspiel erläutern? Wie werden gleichnamige
noch genennt? Wie ungleichnamige? Welches ist das
n der Addition? Wie wird dieß Zeichen ausgesprochen?
ieht das Zeichen der Gleichheit und der Ungleichheit
Welche Vorbereitung ist zur Addition nöthig? Auf
m Grundsatze beruht die Addition? Wie schickt man

sich

sich zur wirklichen Addition gleichartiger Zahlen an? Machen sie alles dieß durch ein Beyspiel anschaulich! Wie heißen demnach die Regeln der Addition in's Kurze gefaßt?

Exempel.

a) Jemand giebt sein Alter so an: Mit 6 Jahren kam ich in die Schulen, wo ich 13 Jahre zubrachte. Von da gieng ich zum Regiment und diente 49 Jahre. Nun bin ich schon 17 Jahre in der Pension; wie alt bin ich?

Operation.

```
  6
 13
 49
 17
---
 85 Jahre.
```

b) In einem Walddistrikte stehen 234 Eichen, 740 Fichten, 1962 Buchbäume, 88 Birken und 95 Förchen; wie viele Bäume sind dieß zusamm?

Operation.

```
   234
   740
 1962
    88
    95
-------
 3119 Bäume.
```

c) Nach der deutschen Enziklopedie besteht die Kreisarmee, oder die Reichstrouppen aus folgenden Mannschaften: Baiern giebt dazu 3473 Mann zu Fuß. Franken 1480 Mann zu Roß, und 5543 zu Fuß. Der churreinische Kreis 14 Mann zu Roß und 9168 zu Fuß. Der oberrheinische Kreis 200 zu Roß, und 6023 zu Fuß. Die schwäbischen Kreistrouppen bestehen in 1184 Mann zu Roß, und 6760 zu Fuß. Westphalen giebt 5000 zu Fuß. Wie stark ist nun die deutsche Reichsarmee?

Ope-

15

Operation.

I	II
Infanterie.	Kavallerie.
473	
543	1480
168	14
9023	200
6760	1184
5000	
35967 Mann zu Fuß.	2878 Mann zu Roß.

l) Von Erschaffung der Welt bis zur Sündflut verflossen Jahre; von der Sündflut bis zum Auszuge der Israe- aus Egypten 857; von diesem Auszuge bis zum Tem- i Salomons 480; vom Tempelbau bis zum Ende der onischen Gefangenschaft 482, von da weg bis zur Ge- Kristi 525; wie lang daurte das alte Testament?

Operation.

1656	
857	
480	
482	
525	
4000	Jahre.

Solche Additionen, wo mehrere Unterabtheilungssor- rkommen, z. B. Gulden, Kreutzer, Pfennige, oder e, Lothe, Quintlein, müssen wir einsweilen verschie- bis wir im Stande sind, kleinere Sorten mittels einer Rechnungsart in größere zu verwandeln.

§. 3.

Von der Multiplikation.

Es kann sich bey Additionen fügen, daß alle ierenden Glieder von gleicher Größe sind. In n Fällen läßt sich die Arbeit merklich abkürzen.

Man

Man darf nur die summierenden Glieder alle abzählen, und die Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. f. aus welchen das summierende Glied besteht, so oft nehmen, als es summierende Glieder sind. Man nennt diese untergeordnete Rechnungsart die **Multiplikation** (Vervielfältigung). Das summierende Glied heißt **Multiplikand**, und die Anzahl aller summierenden Glieder **Multiplikator**. Multiplicieren ist also nichts anders, als den Multiplikand so oft nehmen, oder zu sich selbst addieren, als der Multiplikator Einheiten hat. Die auf diese Art erzielte Summe bekömmt den Namen **Produkt**. Oft werden auch Multiplikand und Multiplikator schlechtweg **Faktores**, und das Produkt nur **Faktum** genennt.

Das Zeichen, daß eine Zahl mit der andern multipliciert werden müsse, ist ein schiefstehendes Kreutz (×) oder auch nur ein Punkt (.). Z. B. 7 multipliciert durch 3, welches 21 giebt, wird daher so geschrieben: $7 \times 3 = 21$, oder $7 . 3 = 21$. Man spricht dieses Zeichen auch häufig durch **mal** aus, als 7 mal 3 u. d. gl.

Um hier bey wirklichen Multiplikationen operieren zu können, ist nothwendig, daß man sogleich im Sinne weis, oder wenigst in einer Tabelle vor sich liegen habe, was das Zweyfache, Dreyfache — bis Neunfache jeder einziffrichten Zahl (Urzahl) betrage. Man heißt diese Tabell, welche alle mögliche Produkte der neun Urzahlen enthält, das Einmaleins oder den pythagorischen Rechentisch, und sieht so aus.

Tabelle.

Tabelle.

1 X 1 = 1	4 X 1 = 4	7 X 1 = 7
1 X 2 = 2	4 X 2 = 8	7 X 2 = 14
1 X 3 = 3	4 X 3 = 12	7 X 3 = 21
1 X 4 = 4	4 X 4 = 16	7 X 4 = 28
1 X 5 = 5	4 X 5 = 20	7 X 5 = 35
1 X 6 = 6	4 X 6 = 24	7 X 6 = 42
1 X 7 = 7	4 X 7 = 28	7 X 7 = 49
1 X 8 = 8	4 X 8 = 32	7 X 8 = 56
1 X 9 = 9	4 X 9 = 36	7 X 9 = 63
2 X 1 = 2	5 X 1 = 5	8 X 1 = 8
2 X 2 = 4	5 X 2 = 10	8 X 2 = 16
2 X 3 = 6	5 X 3 = 15	8 X 3 = 24
2 X 4 = 8	5 X 4 = 20	8 X 4 = 32
2 X 5 = 10	5 X 5 = 25	8 X 5 = 40
2 X 6 = 12	5 X 6 = 30	8 X 6 = 48
2 X 7 = 14	5 X 7 = 35	8 X 7 = 56
2 X 8 = 16	5 X 8 = 40	8 X 8 = 64
2 X 9 = 18	5 X 9 = 45	8 X 9 = 72
3 X 1 = 3	6 X 1 = 6	9 X 1 = 9
3 X 2 = 6	6 X 2 = 12	9 X 2 = 18
3 X 3 = 9	6 X 3 = 18	9 X 3 = 27
3 X 4 = 12	6 X 4 = 24	9 X 4 = 36
3 X 5 = 15	6 X 5 = 30	9 X 5 = 45
3 X 6 = 18	6 X 6 = 36	9 X 6 = 54
3 X 7 = 21	6 X 7 = 42	9 X 7 = 63
3 X 8 = 24	6 X 8 = 48	9 X 8 = 72
3 X 9 = 27	6 X 9 = 54	9 X 9 = 81

Aus dieser Tabelle ersieht man erstens, daß die Einheit als Faktor nichts multipliciert, sondern den andern Faktor bey seiner vorigen Größe läßt: zweytens daß das Produkt nicht geändert werde, wenn Multiplikand und Multiplikator verwechselt werden. Es ist z. B. $5 \times 3 = 15$, und auch $3 \times 5 = 15$, wo im ersten Fall 5 der Multiplikand und 3 der Multiplikator war, im zweyten Fall aber 3 der Multiplikand und 5 der Multiplikator geworden. Drittens endlich, daß kein Produkt der neun Urzahlen über zwey Ziffer haben könne; sondern alle entweder ein- oder zweyziffricht bleiben.

Ehe wir zu wirklichen Multiplikationen schreiten, wollen wir selbe in drey Klassen eintheilen. Die erste Klasse soll solche Multiplikationen enthalten, wo der Multiplikator in einem einzigen Ziffer besteht. In der zwoten Klasse hat der Multiplikator eine Einheit mit Nullen, wie 10, 100, 1000 u. d. gl. Bey den Multiplikationen der dritten Klasse sind beyde Faktores mehrziffrichte Zahlen.

Wir wollen uns nun wirklich zum Multiplikationsgeschäft fertig machen. Es soll z. B. 564 durch 5 multipliciert werden. Als eine Addition sieht die Operation so aus:

```
  5 6 4
  5 6 4
  5 6 4
  5 6 4
  5 6 4
---------
2 8 2 0
```

Summe

Als eine Multiplikation setzt man gemeiniglich den Multiplikator unter das letzte Ziffer des Multiplikands, und zieht darunter eine Querlinie; dann forscht man nach dem Sooftfachen der Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. f. als der Multiplikator begehrt, und befolgt beym Anschreiben die nämliche Regel, wie in der Addition bey der Summe. Hier ist das Beyspiel gemacht!

5 6 4 Multiplikand
5 Multiplikator } Faktores.
2 8 2 0 Produkt oder Faktum.

Die Sprechform lautet ungefähr so: 5 mal 4 ist 20, 0 angeschrieben, bleibt 2; 5 mal 6 ist 30 und 2 ist 32, 2 angeschrieben, bleibt 3; 5 mal 5 ist 25 und 3 ist 28, welches ganz hingesetzt wird.

Ist der Multiplikator mehrziffricht, der Multiplikand hingegen einziffricht, so dörfen sie nur verwechselt werden. Z. B. 6 x 39 ist soviel als 39 x 6 und gehört daher zur ersten Klasse

3 9
6
2 3 4.

Nichts ist leichter als die Multiplikationen der zweyten Klasse, wo ein Faktor 10, 100, 1000 u. s. f. gl. heißt. Denn man darf dem andern Faktor nur die Nullen anhängen. Z. E. 728 x 10 = 7280. Denn Zahlen bekommen dadurch einen zehnfachen Werth, wenn jedes Ziffer nach §. 1. um eine Stelle weiter gegen die Linke gerückt wird: das thut aber das angehängte Null; folglich ist dadurch der Zweck erreicht worden. Ein gleiches versteht sich auch vom

Hundertfachen, Tausendfachen, wenn zwey oder drey Nullen angehängt werden.

Hat die Nullzahl ein stärkers Ziffer als den Einser, so läßt sich selbe allemal in zween solche Faktores zerfällen, wo ein Faktor zur ersten, und der andere zur zwoten Klasse gehört, z. B. 481 X 300; weil 300 = 3 X 100 ist, so kann 481 zuerst durch 3 und dann durch 100 multipliciert werden. Dieß geschieht aber durch eine solche Untereinanderstellung, daß die Nullen des einen Faktors gegen die Rechte hinausgeschrieben werden, wie hier

481
300
144300.

Hat der andere Faktor ebenfalls am Ende Nullen, so werden auch diese dem Produkt angehängt, weil es die doppelte Zerfällung der Faktoren so fodert. Z. E. 260 X 800

260 oder 260
800 800
208000 208000; denn 8mal o oder 8 mal nichts ist wieder nichts.

Sind beyde Faktores mehrzifferichte Zahlen, so setzt man die kleinere unter die größere, nach der ersten Regel der Addition; auffer wenn es Endnullen giebt, in welchem Falle die eben gegebne Vorschrift befolgt wird. Man multipliciere dann mit jedem Ziffer des Multiplikators den ganzen Multiplikand durch, und stelle die daraus entspringenden Produkte so untereinander, daß jedes unter seinem Multiplikatorsziffer anfängt. Am Ende müssen diese

Pro-

Produkte in der nämlichen Stellung addiert werden. Ein Beyspiel hierüber

```
    3294
     146
  -------
   19764
  13176
  3294
  -------
  480924
```

Der Beweis läßt sich am faßlichsten so dafür machen, wenn man jedes Ziffer des Multiplikators nach ihrem Werthe als eine besondere Zahl angesetzt, den Multiplikand mit diesen Theilen besonders multipliciert, und die eroberten Produkte zusamm addiert, so wird sich, wenn die Nullen, die in der Addition nichts geben, am Ende weggetilgt werden, die Stellung der obigen Partialprodukte bald rechtfertigen. Es besteht aber 146 aus 6 + 40 + 100. Nun multipliciert!

```
  3294      3294      3294
     6        40       100
 -------   -------   -------
 19764     131760    329400
```

Addition.

```
    19764
   131760
  3294ØØ
  -------
  480924
```

Schließlich muß ich noch jenen Fall erinnern, wenn sich mitten im Multiplikator ein oder mehrere Nullen befinden. Weil 0 × 2, das ist, niemal 2; 0 × 3 oder niemal 3 u. s. f. allemal wieder Null giebt,

giebt, folglich in einem solchen Partialprodukte lauter Nullen zum Vorschein kämen, so können solche Nullen im Multiplikator, um Zeit und Raum zu ersparen, übersprungen werden. Man vergleiche diese beyden Operationen.

1 2 4 3 5	1 2 4 3 5
3 0 0 2	3 0 0 2
2 4 8 7 0	2 4 8 7 0
0 0 0 0 0	3 7 3 0 5
0 0 0 0 0	3 7 3 2 9 8 7 0
3 7 3 0 5	
3 7 3 2 9 8 7 0	

Wir wollen nun alle diese gegebnen und erwiesnen Regeln der Multiplikation so ins Kurze fassen.

1) Man nehme den kleinern Faktor zum Multiplikator; um aber zu sehen, welcher Faktor größer ist, muß man die Endnullen nicht in Erwägung bringen, sondern die Zahlen betrachten, als wenn jene gar nicht da wären.

2) Man stelle den Multiplikator so unter den Multiplikand, daß die letzten Ziffer derselben (von Nullen ist hier keine Rede) übereinander zu stehen kommen, und unterstreiche sie durch eine Linie.

3) Man multipliciere mit jedem Ziffer den ganzen Multiplikand durch, und fange jedes dieser einzelnen Produkte unter seinem gehörigen Multiplikatorsziffer zu schreiben an. Kommen in Mitte des Multiplikators Nullen vor, so werden sie übersprungen.

4) Am

4) Am Ende werden diese Produkte, im Fall der Multiplikator nicht einziffricht gewesen, so wie sie stehen, addiert.

Fragen.

In welchen Fällen der Addition kann das Geschäft merklich abgekürzt werden? Wie geht man bey dieser Abkürzung überhaupts zu Werke? Wie heißt diese Rechnungsart? Was wird hier Multiplikand, was Multiplikator, was Produkt genennt? Was haben diese drey Zahlen noch für Benennungen? Was hat man für ein Zeichen um die Multiplikation anzuzeigen? Wie kann dieses Zeichen ausgesprochen werden? Was wird von Seite des Rechners erfodert, um das Geschäft der Multiplikatton vornehmen zu können? Wie viel ist z. B. 3 × 4, 5 × 7, 9 × 8 u. s. w.? Welche Bemerkungen lassen sich in der Einmaleinstabelle machen? Wie lassen sich die Multiplikationsexempel eintheilen? Wie sehen Multiplikationsbeyspiele der ersten Klasse als Additionen aus? Wie als Multiplikationen? Wie werden die Multiplikationen der ersten Klasse gemacht? wie der zweyten Klasse? Wo liegt der Grund dieses Verfahrens? Wie endlich der dritten Klasse, und wie wird der Beweis geführt? Wie können die Nullen mitten im Multiplikator die Arbeit abkürzen? Fassen Sie mir alle Regeln der Multiplikation ordentlich ins Kurze!

Exempel.

a) Auf einer Fleischbank werden auf einmal 95 Kälber gestochen; wie viel giebt es da Kälberfüsse ab?

Operation.

95
4
380 Füsse.

b) Ein

b) Ein fleißiger Knabe lernt aus seiner französischen Grammaire täglich 10 Wörter auswendig, wie viel wird er in einem Jahre oder 365 Tägen Wörter im Kopfe haben?

Operation.

365
10
3650 Wörter.

c) Auf einer Papiermühle werden wöchentlich 27640 Bögen Schreibpapier verfertigt; was macht dieß in einem Jahre oder 52 Wochen?

Operation.

27640
52
55280
138200
1437280 Bögen.

d) Der Puls schlägt bey einem gesunden Menschen in einer Minute gemeiniglich 72 mal; wie oft geschieht dieß in einer Stund oder in 60 Minuten; wie oft in einem ganzen Tage?

Operation.

72
60
4320 mal in einer Stunde.
24
1728
864
103680 mal in einem Tage.

§. 4.

Von der zwoten Hauptrechnungsart der Subtraktion.

Der kleine Georg, setzen wir, hat 32 Kreutzer in seiner Sparbüchse, und möchte gerne wissen, um wie viel Heinrich sein Bruder, welcher 49 kr. in seiner zählt, mehr habe. Er muß, um dieß zu erfahren, von 49 kr. seine 32 kr. hinweg nehmen oder wegzählen. Wenn er dieß thut, so findet er die unbekannte Zahl, um welche 49 größer als 32; oder umgekehrt 32 kleiner als 49 ist. Dieses Verfahren heißen die Rechnungskundigen Subtraktion, und sagen, Subtrahieren sey in der Arithmetik nichts anders, als den Unterschied zwoer Zahlen bestimmen.

Das Zeichen der Subtraktion ist eine liegende Linie (—) und wird durch minus oder weniger ausgesprochen. Es heißt daher 10 — 3 = 7 so viel als: zehn minus drey ist äqual sieben.

Die Vorbereitungen zum wirklichen Subtraktionsgeschäft bestehen darinn, daß man alle mögliche Unterschiede der Zahlen von 1 bis 19 auswendig weis; z. B. 7 — 5 = 2, 11 — 8 = 3, u. d. gl.

Die Zahlen selbst, um von einander subtrahiert werden zu können, müssen wieder gleichartig seyn; denn man kann z. B. wohl Aepfel von Aepfeln wegnehmen, aber nicht Aepfel von lauter Pfirsichen oder Pflaumen.

Bey der wirklichen Operation schreibt man die kleinere Zahl, welche der Subtrahend heißt, unter

die

die größere, welche Minuend genennt wird, so zwar, daß man Einheiten von Einheiten, Zehner von Zehnern u. s. f. abziehen kann. Der Unterschied dieser beyden Zahlen, welcher am Ende herauskömmt, und durch einen Strich, wie bey der Addition, davon getrennt wird, hat auch die Benennungen Rest, Differenz gemein.

Wir setzen, um ein Exempel zu haben, Peter sey dem Johann 784 fl. schuldig: Peter zahle ihm heute 361 fl.; wie viel bleibt er noch rückständig? Die Rechnung hat nun gegenwärtige Gestalt.

7 8 4	Minuend
3 6 1	Subtrahend
4 2 3	Rest

Die Sprechform ist diese: 1 von 4 bleibt 3; 6 von 8 bleibt 2; 3 von 7 bleibt 4.

Daß auf diese Weise richtig verfahren worden, erhellet daraus, wenn man die Zahlen zergliedert. Peter ist dem Johann 700 + 80 + 4 fl. schuldig: Johann bezahlt 300 + 60 + 1 fl. Es ist also natürlich, daß von den Einheiten noch 3, von den Zehnern 2, das ist 20, und von den Hundertern 4, das ist, 400 bleibt.

Oft fügt sich's, daß irgendwo ein unters Ziffer größer als sein darüberstehendes ist (wenn sie beyde gleich sind, giebt der Rest Null) und also nicht abgezogen werden kann. In solchen Fällen wird von der nächsten Stelle zur Linken eine Einheit entlehnt, und dann ist das zukleingewesene Ziffer um zehn Einheiten vom niederen Range größer geworden. Man kann eine solche Entlehnung der Einheit durch ein

dar-

darauf gesetztes Strichchen anzeigen, damit man sich nachher erinnere, daß jenes Ziffer, von welchem entlehnt worden, um eins weniger gelte. Hier ist ein Beyspiel!

```
    ' ' '
  3 4 3 8 2
    3 9 2 7
  -----------
  3 0 4 5 5
```

Man sagt nämlich: 7 von 12 bleibt 5; 2 von 7 bleibt 5; 9 von 13 bleibt 4; 3 von 3 bleibt 0; nichts von 3 bleibt 3.

Es kann sich ereignen, daß jene Zifferstelle, wovon entlehnt werden soll, selbst ein Null ist. Man muß demnach vom zunächst daraufkommenden Ziffer eine Einheit entlehnen. Weil nun diese Einheit 10 solche Einheiten giebt, wie sie beym Null hangeln, so lasse man dort 9 Einheiten liegen, nehme eine Einheit dahin, wo man sie nöthig hat, und wird selbe mehrmals 10 gelten. So viel sich nun Nullen zwischen der Entlehnung befinden, so viel Neuner sind es nachher geworden. Wieder ein Exempel!

```
    '   '   '
  3 4 0 0 0 6 0 2
  1 2 5 0 1 8 4 3
  ---------------
  2 1 4 9 8 7 5 9
```

Nun wollen wir diese Regeln der Subtraktion nach unsrer Gewohnheit in's Kurze bringen. Sie lassen so:

1) Man stelle den Subtrahend unter den Minuend, nach der Regel der Addition und Multiplikation, und ziehe eine Querlinie darunter.

2) Ziehe

2) Ziehe jedes Ziffer von dem darüberstehenden ab, und setze den Rest unter die Linie hin.

3) Gleiche Ziffer geben Null zum Rest.

4) Ist das obere Ziffer zu klein zum Abziehen, so werde von dem nächsten Ziffer zur Linken eine Einheit entlehnt, welche demnach das bemeldte kleine Ziffer um 10 mehr gelten macht.

5) Ist das nächste Ziffer selbst ein Null, so gehe man so weit, bis ein anders Ziffer kömmt; die dazwischen liegenden Nullen sind dann als lauter Neuner anzusehen.

Wenn man das Nämliche, was man von einer Zahl hinweggethan, wieder hinzugiebt, so muß natürlich die ursprüngliche Zahl herauskommen, die man vorher gehabt hat. Will man sich demnach bey der Subtraktion überzeugen, ob man richtig gerechnet habe, welches sonst die Probe machen heißt; so darf nur der Subtrahend zum Rest, oder dieser zu jenem addiert werden, und die Summe muß so groß seyn, als der Minuend. Wir wollen zum Beweis das letzte Exempel nochmal hieher setzen, und diese Probe vornehmen.

```
  340000602
  125018433
 ----------
  214987569
 ----------
Probe 340000602
```

Es ist daher Addition die Probe der Subtraktion. Es kann aber auch umgekehrt gezeigt werden, daß Subtraktion die Probe der Addition sey; denn wenn ich alle Zahlen, die ich zu einer anfänglichen Zahl addiert habe, von der Summe

wieder

wieder wegnehme, so muß jene nothwendig übrig bleiben. Die anfängliche Zahl kann aber jede von den summierenden Gliedern seyn. Man darf demnach am Ende der Addition nur alle Zahlen, bis auf eine, auf ein neues zusamm addieren, und diese Summe von der Hauptsumme abziehen, so wird die ausgelassene Zahl übrig bleiben. Hier soll ein Beyspiel stehen, und das Sternchen bey der Probe die ausgelassene Zahl anzeigen.

	5	4	3	6
		5	9	0
	6	7	2	8 *
		4	7	7
	9	4	0	8
2	2	6	3	9 Hauptsumme.
1	5	9	1	1 Probsumme.
	6	7	2	8 Probrest.

Fragen.

Wie kann man sich beyläufig einen Begriff von Subtraktion machen? Was heißt subtrahieren? Welches ist das Zeichen der Subtraktion, und wie wird es ausgesprochen? Worin bestehen die Vorbereitungen zur Fertigkeit im Subtrahieren? Welche Eigenschaft müssen Zahlen haben, um von einander subtrahiert werden zu können? Wie viel gehören Zahlen zur Subtraktion? Was heißt man Subtrahend, Minuend, Rest? Welche Regel hat man bey der wirklichen Operation des Subtrahierens? Wie läßt sich allenfalls diese Methode zu subtrahieren rechtfertigen? Was ist der Rest, wenn die übereinander stehenden Ziffer des Minuends und Subtrahends gleich sind? Wie hat man es anzugehen, wenn die obern Ziffer kleiner als die untern sind? Wenn aber das nächste Ziffer, wovon eine Einheit entlehnt werden soll, selbst ein

Null ist? Als was hat man nachher die Nullen anzusehen, welche zwischen jenem Ziffer, wo Mangel ist, und jenem, wo entlehnt worden, sich befinden? Wie heißen alle Subtraktionsregeln ins Kurze gefaßt? Was heißt eine Rechnungsprobe? Was ist die Probe der Subtraktion, und warum? Was ist die Probe der Addition und warum? Man zeige beyde Proben in Beyspielen!

Exempel.

a) Wenn eine Post zu 4 Stunden Weges gerechnet wird, so sind von München bis Mannheim 85 Stunde, und von München bis Wien 113 Stund; um wie viel Stunden ist Wien weiter von München als Mannheim entfernt?

Operation.

113
85

Antw. um 28 Stunden.

b) Wir zählen bereits seit Kristi Geburt 1796 Jahre; die Türken hingegen erst 1210 Jahre seit der Geburt ihres Religionsstifters Mahomet; um wie viel Jahre lebte Mahomet später als Kristus?

Operation.

1796
1210

Antw. um 586 Jahre.

c) Alle Länder des russischen Reiches in Europa und Asien halten nach Gatterer 201500 Quadratmeilen. Das aber, was Rußland in Europa besitzt, beträgt 64471 Quadratmeilen; was bleibt für den russischen Länderantheil in Asien übrig?

Operation.

201500
64471
137029 Quadratmeilen.

§. 5.

Von der Division.

Zuweilen fordern es die Umstände, daß man ine Zahl von der andern so oft abziehen soll, als möglich ist. Dieser Fall der Subtraktion heißt ie Division. Der Subtrahend wird hier Divisor, er Minuend Dividend, und die Zahl, welche an- igt, wie oft der Divisor im Dividend enthalten t, Quotient oder Quotus genennt. Bleibt zu- tzt noch etwas übrig, so bekömmt es den Name esiduum, oder schlechtweg auch Rest. Wir wol- n dieß alles durch ein Beyspiel versinnlichen. Man ebt Alberten eine Rolle Geldes, worinn sich 46 lbe Kopfstücke (nach unsrer Sprache Zwölfer) be- nden. Er soll uns bestimmen, wie viel dieß Gul- n sind. Weil nun 5 Zwölfer einen Gulden geben, darf Albert nur so oft 5 Zwölfer wegzählen, als möglich ist, und er hat auch eben darum so viele ulden gezählt. Dieß wird aber hier 9 mal ge- hehen können; denn $9 \times 5 = 45$, wo also noch Zwölfer übrig bleibt. Hier ist demnach 46 der ividend, 5 der Divisor, 9 der Quotus, und 1 s Residuum.

Das

Das Zeichen der Division ist der gewöhnliche Doppelpunkt (:) welcher zwischen dem Dividend und Divisor so gesetzt wird, daß jener vor und dieser nach ihm zu stehen kömmt: Z. B. 12 : 4 = 3, welches so gelesen wird: Zwölf dividiert durch vier ist äqual drey. Man setzt auch manchmal, um die Division anzuzeigen, den Divisor unter den Dividend, und trennet beyde Zahlen durch einen Zwischenstrich. Obiges Beyspiel wird demnach so aussehen $\frac{12}{4}$. Dieser Bezeichnungsart bedient man sich vorzüglich in Fällen, wo der Divisor größer als der Dividend ist, z. B. $\frac{7}{8}$. Man nennt solche Ausdrücke Brüche, Fraktionen, von welchen wir tiefer unten ausführlicher sprechen werden. Wenn bey Divisionen zuletzt noch etwas übrig bleibt, so kann dieser Rest ebenfalls so angezeigt werden.

Die Vorbereitung zum fertigen Dividieren besteht mehrmals darinn, daß man die Einmaleinstabelle seinem Gedächtniße recht wohl eingeprägt habe; damit man versuchen könne, wie oft sich der Divisor vom Dividend abziehen lasse.

Wir wollen wieder, wie bey der Multiplikation, drey Klassen von Divisionsfällen festsetzen. In der ersten kommen solche vor, wo der Divisor einziffricht ist; in der zwoten soll der Divisor 10, 100, 1000 u. s. w. seyn; in der dritten endlich kann der Divisor aus mehren andern Ziffern bestehen.

Beym Divisionsgeschäft selbst stellt man, trotz den bisher gegebnen Regeln, den Divisor so weit gegen die Linke des Dividends, als er sich noch abziehen läßt. Dann forscht man, mit welcher Zahl der Divisor multipliciert werden müsse, um noch

von

von dem darüberstehenden Theile des Dividends abgezogen werden zu können. Jene Zahl, die mit dem Divisor multipliciert worden, wird rechts neben dem Dividend als Quotus hinausgestellt, und durch einen dazwischen gezognen Senkstrich von selbem abgesondert. Um die Sache anschaulich zu machen, wollen wir nach und nach die Zahl 729 durch 3 dividieren.

Dividend	7 2 9 | 2	Quotus.
Divisor	3	
Produkt	6	

Man wird aus der Vorrückung des Divisors gegen die Linke leicht abnehmen können, zu welchem Zifferrange der Quotus gehöre. Hier wurde er um zwey Ziffer vorgerückt, folglich ist der einsweilige Quotus 2 im Hunderterrange.

Nachdem das Produkt abgezogen worden, wie man hier sieht

```
7 2 9 | 2
3
6
-
1
```

so wird zum Rest das nächste Ziffer herabgeschrieben (ist kein Rest geblieben, so kömmt es allein zu stehen) und auf gleiche Weise wieder, wie oben, nach einem Quotus geforscht, der mit dem Divisor multipliciert mehrmals abgezogen, so wie der Quotus hinausgeschrieben werden muß.

Wir wollen das angefangene Exempel ganz fertig machen.

34

```
7 2 9 | 2 4 3
3
6
---
1 2
  3
1 2
---
- - 9
    3
    9
---
```

Die Sprechform ist diese: 3 in 7 ist 2 mal enthalten (oder geht 2 mal), 2 mal 3 ist 6; 6 von 7 bleibt 1. 3 in 12 geht 4 mal; 4 mal 3 ist 12; 12 von 12 geht auf. 3 in 9 geht 3 mal; 3 mal 3 ist 9; 9 von 9 geht auf.

Es ist also die Zahl 3 in der Zahl 729 gerade 243 mal enthalten. Wenn man demnach die Zahl 3 wiederum 243 mal nimmt, oder was eines ist, 3 durch 243 multipliciert, so muß der Dividend als Produkt herauskommen, wie hier auch wirklich geschieht.

```
2 4 3
    3
-----
7 2 9
```

Weil nun die Multiplikation den Divisor so oft zurücke giebt, als ihn die Division weggenommen, so ist Multiplikation die Probe der Division: und wechselweise, wenn man sich bey Multiplikationen überzeugen will, ob man recht gerechnet habe, so darf nur das Produkt durch den Multiplikator dividiert werden; denn dadurch wird er wieder so oft hinweggenommen, als er vorher zu sich

addiert

ddiert worden. Machen wir zum Beweis die Pro-
e von dem obigen Beyspiel, Seite 19. Dort war
as Produkt 2820 und der Multiplikator 5. Die
Division muß den Multiplikand 564 geben.

```
2 8 2 0 | 5 6 4
        | -
        | 5
  2 5   |
  ---
    3 2
      5
    3 0
    ---
      2 0
        5
      2 0
      ---
```

Nun lassen sich die Divisionen der zwoten
lasse, wo der Divisor 10, 100, 1000 u. d. gl.
t, sehr leicht erklären. Ich zeigte bey der Multi-
likation der nämlichen Klasse, daß, wenn der Mul-
plikator 10, 100, 1000 u. s. f. ist, man bloß
em Multiplikand so viele Nullen anhängen dörfe,
ls sich beym Multiplikator vorfinden. Nun ist
e Division als Probe das Gegentheil der Multi-
likation; folglich müssen hier wieder so viele End-
ullen vom Dividend abgeschnitten werden, als der
Divisor bey sich hat. Will man also z. B. 543000
urch 1000 dividieren, so wird 543 der Quotus seyn;
enn diese Verfahrungsart

```
5 4 3 | 0 0 0 | 5 4 3
1     | 0 0 0 |
```

ird durch die Probe gerechtfertigt:

543 X 1000 = 543000.

Ist der Dividend nicht mit so vielen Endnullen versehen, oder hat gar keines, so müssen gleichwohl auch andere Ziffer weggeschnitten werden, welche man dem Quotus als einen Bruch anhängt, z. B. 946384 : 100

9 4 6 3 | 8 4 ¹/₁ 9 4 6 3 $\frac{84}{100}$
1 0 0

Denn die Zahl besteht aus den zween Theilen 946300 + 84. Beym ersten Theil geht die Division auf und giebt 9463: der zweyte Theil ist aber zum Dividieren zu klein; daher muß die Division nur angezeigt werden.

Besteht der Divisor aus Nullen und einem andern Ziffer, welches der Uebergang zur dritten Klasse ist, so werden wieder so viele Endziffer vom Dividend abgeschnitten, als der Divisor Nullen hat: der vordere Theil aber bis zum Abschnitt wird ordentlich durch das Anfangsziffer dividiert. Z. B. es sollen 15900 Kreutzer durch die Division mit 60 zu Gulden gemacht werden, so wird die Operation diese seyn:

1 5 9 0 0 ¹/₁ 2 6 5 fl.
6 0

1 2

3 9
6

3 6

3 0
6

3 0

0

Denn

Denn ich kann die Kreutzer auch zuvor durch die Division mit 10 in Zehnerstücke verwandeln (denken wir uns, es gebe solche Geldsorten wie z. B. in Oesterreich) und nachher erst, weil 6 Zehnerstücke auf einen Gulden gehen, den erlangten Quotus nochmal mit 6 dividieren, welches die nämliche Antwort auswirft.

Divisionen der dritten Klasse sind etwas mühsamer, als die bisherigen. Man befolgt zwar beym Anschreiben die oben gegebne Regel, und forscht anfangs mit dem ersten Ziffer des Divisors zur Linken in jenen Theil des Dividends, welcher darüber steht, wie oft es darinn enthalten sey. Allein, wenn man den ganzen Divisor mit so einem Quotusziffer multipliciert, sieht man sehr oft, daß das Produkt nicht abgezogen werden könne. Nimmt man aber den Quotus zu klein, so bleibt beym Abzuge entweders mehr oder gerade so viel übrig als der Divisor beträgt, welches mehrmals ein Fehler ist. Je kleiner daher das Anfangsziffer des Divisors, und je größer das darauffolgende ausfällt, desto schwerer wird das Divisionsgeschäft. Jene sind die leichtesten Divisionen dieser Klasse, wo im Divisor nach dem ersten Ziffer ein oder mehrere Nullen stehen, wenn schon noch andere Zahlzeichen nachfolgen. Hingegen bey den übrigen Divisionen der dritten Klasse kann nur lange Uebung, mit einem scharfen Geistesblick verbunden, eine größere Fertigkeit geben. Lassen sie uns das Exempel 1283082 : 254 zum Muster aufstellen!

```
1 2 8 3 0 8 2 | 5 0 5 1 128/254
  2 5 4
1 2 7 0
-------
    1 3 0
    2 5 4
    0 0 0
    -----
    1 3 0 8
      2 5 4
1 2 7 0
-------
      3 8 2
      2 5 4
      2 5 4
      -----
      1 2 8
```

Wenn ein Ziffer im Quotus Null wird, so braucht es eben nicht, den Divisor mit o zu multiplicieren; sondern man kann sogleich wieder ein neues Ziffer vom Dividend herabsetzen; weil bey dem wirklichen Nullprodukte die Subtraktion doch immer das Vorige giebt.

Ist der Divisor schon einmal mit dem nämlichen Quotusziffer multipliciert worden, mit welchem nun mehrmals soll multipliciert werden, so kann man sogleich das erstere Produkt zum Abzuge herab schreiben.

Kömmt ferner im Quotus ein Einser vor, so darf alsogleich ohne Multiplikation der einfache Divisor abgezogen werden; denn der Multiplikator Eins ändert nichts im Multiplikand. Obiges Exempel fällt durch Anwendung dieser drey Vortheile kürzer und leichter aus.

1 2 8 3 0 8 2 $\frac{1}{1}$ 5 0 5 1 $\frac{128}{254}$

2 5 4

1 2 7 0

---

1 3 0 8

2 5 4

1 2 7 0

---

3 8 2

2 5 4

---

1 2 8

Divisionen endlich mit einziffrichten Divisoren, sie mögen Ausgangsnullen haben oder nicht, lassen sich besser verrichten, wenn man die Produkte im Sinne behält, sie mittels Ausstreichung der Ziffer vom Dividend abzieht, und die Reste über den Dividend hinauf setzt. Die Rechnungen werden dadurch weit kompendiöser. Das obige Kreutzerexempel S. 36 soll dieß beweisen.

3 3

x 5 9 ∅ 0 $\frac{1}{1}$ 2 6 5 fl.

6 6 6 0

*) Es giebt noch mehrere Divisionsarten, welche hier zwar der enge Raum ausschliesset, die aber in meinem größern Werke §§. 68. 72. 224 u. 229. alle zu finden sind.

Es sollen nun zuletzt wieder alle Regeln der Division im Kurzen dastehen. Sie heißen so:

1) Man stelle den Divisor so weit links unter den Dividend, daß er sich noch von den darüberstehenden Ziffern abziehen läßt, und mache rechts hinter dem Dividend eine senkrechte Schlußlinie.

2) Man

2) Man forsche, mit welchem Ziffer man den Divisor multiplicieren müsse, um noch die Subtraktion mit dem Produkte vornehmen zu können.

3) Dieses Ziffer werde hinter die Schlußlinie geschrieben, der Divisor damit multipliciert und das Produkt wirklich abgezogen.

4) Sind noch Ziffer im Dividend vorhanden, so wird das nächste davon herabgeschrieben, und, wenn ein Rest vorhanden ist, dazu hingesetzt.

5) Ist der Divisor größer als die darüberstehende Zahl, so schreibt man statt dem Quotus ein Null hinaus, und setzt ein neues Ziffer, wenn eines vorhanden ist, zur Fortsetzung der Division herab.

7) Divisionen mit einziffrichten Divisoren werden bequemer aufwärts verrichtet.

Fragen.

Was ist die Division? Was heißt Dividend, Divisor, Quotus und Residuum? Man zeige alles dieß in einem Beyspiele! Welches ist das Zeichen der Division? Welcher Bezeichnungsart bedient man sich gerne in Fällen, wo der Dividend kleiner als der Divisor ist? Wann wird diese Bezeichnungsart noch angewendet? Was wird zum fertigen Dividieren erfodert? Wie können die Divisionen füglich abgetheilt werden? Wie geht man im Divisionsgeschäft selbst zu Werke? Was ist die Probe der Division, und warum? Was für eine Probe gewährt die Division, und aus welchem Grunde? Wie werden Divisionen der zwoten Klasse behandelt, und wie diese Behandlungsart erwiesen? Wie aber, wenn der Dividend nicht so viele oder gar keine Endnullen hat? Wo ist die Rechtfertigung dieses Verfahrens? Wie verfährt man, wenn

der

ber Divisor als Nullzahl ein stärkers Anfangsziffer hat? Man beweise dieß durch ein Beyspiel! Warum sind die Divisionen der dritten Klasse größtentheils mühsamer als die übrigen? Wie kann man erkennen, daß ein Quotusziffer zu wenig genommen worden? In welchen Fällen wird also die Division sehr erschwert? Welches sind die leichtesten Divisionen dieser Klasse? Welche abkürzende Vortheile giebt es in der Division? Wie lassen sich einziffrichte Divisionen bequemer verrichten? Wie heißen nun alle Regeln der Division kurz im Zusammenhange dargelegt?

Exempel.

a) Einer jungen Gesellschaft, die aus 5 kleinen Mädchen bestand, verehrte ein Kinderfreund einige Pfunde Kastanien, mit dem Bedinge, daß sie selbe gleich unter sich austheilen sollen; wie viel Stücke trift ein jedes, da es in allen 380 Kastanien sind?

Operation.

$$\begin{array}{r|l} 5 & \\ 3\,8\,0 & \frac{1}{1}\ 7\ 6\ \text{Kastanien.} \\ 5\,5 & \end{array}$$

b) Jemand möchte gerne ein schönes Liederbuch, das 280 Seiten hat, in 10 Tägen abschreiben, wie viel Seiten muß er in einem Tage fertig machen?

Operation.

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ 1\,4 & \frac{1}{1}\ 1\ 4\ \text{Seiten.} \\ 1 & \end{array}$$

c) Eine einfache Baumallee ist 1344 Schuh lang; wie viel stehen Bäume darauf, wenn einer vom andern immer 24 Schuh entfernt ist?

Operation.

1344 | 24 = 56 Bäume.
24

120

144
24

144

0

d) Der Planet Saturn braucht zur Vollendung seiner Laufbahn 10749 Täge; wie viel sind dieß gemeine Jahre zu 365 Täg?

Operation.

10749 | 365 = 29 Jahre und 164 Täge.
365

730

3449
365

3285

164

e) Einer Steuerausschreibung zufolge gab es im Jahr 1776 in der obern Pfalz 171784 Menschen und 28754 Häuser; wie viel treffen Personen auf ein Haus?

Operation.

171784 | 28754 = 5 bis 6 Personen.
28754

143770

28014

§. 6.

§. 6.

Addition und Subtraktion mit Unterabtheilungsbenennungen.

Wenn man sagt, der Gulden habe 60 Kreutzer, der Kreutzer 4 Pfennige, der Pfennig 2 Häller: oder der Zentner bestehe aus 100 Pfunden, das Pfund aus 32 Lothen, das Loth aus 4 Quintchen, so sind dieß **Unterabtheilungsbenennungen** des Geldes, des Gewichts. Man spricht nun im gemeinen Leben nicht gerne: ich habe heute 250 Kreutzer eingenommen; oder es sind 96 Loth von dieser und dieser Waarensorte weggegangen, u. d. gl.: sondern man drückt sich lieber in Gulden und Pfunden, und wenn diese die Zahl 100 übersteigen, in Zentnern aus, und sagt dafür 4 fl. 10 kr. 3 Pfund u. s. w. Es kann sich aber bey Additionen solcher Unterabtheilungsbenennungen sehr oft fügen, daß sich dieselben stark anhäufen, und in höhere Benennungen verwandelt zu werden wünschen. Daher müssen die Häller oder Pfennige durch die Division mit 8 oder 4 zu Kreutzer, und die Kreutzer, wie oben, Seite 39, durch die Division mit 60 zu Gulden umgeschaffen werden. Auf gleiche Weise hat man auch die Quintchen durch 4, die Loth durch 32 und die Pfunde durch 100 zu dividieren. Uebrigens haben Additionen dieser Art eben nichts besonders. Man fängt bey der kleinsten Sorte an, und wenn man durch die Division eine oder mehrere Einheiten der nächst größern Benennung erobert hat, so werden sie auch dahin gezählt, und das allenfalsige Residuum an seinem Orte liegen gelassen. Ein gleiches Verfahren beobachtet man auch bey den übrigen Unterab-

terabtheilungen. Wir wollen hier die ganze Sache in einem Paar Beyspiele anschaulich machen.

I

fl.	kr.	hl.
54	36	—
8	30	5
14	54	3
9	44	5
87 fl.	45 kr.	5 hl.

(5
13 1/1 1 kr.
8
(4
16 (5 1/1 2 fl.
60

II

Zenten	Pfund	Loth	Quintchen
4	80	27	1
—	71	30	3
1	66	24	2
7	—	12	1
5	94	20	3
20 Zt.	14 Pf.	19 Lt.	2 Q.

(2
10 1/1 2 Lt.
4
115 1/1 3 Pf.
32
96
19
3
14 1/1 3 Zt.
100

Daraus erhellet, daß die Summen der kleinern Abtheilungen sogleich seitwärts irgendwohin geschrieben und dividiert werden. Bey den Pfunden hat es zwar keiner Hinausschreibung nöthig; denn es darf nur das dritte Ziffer als Zentner weggenommen werden, die übrigen bleiben, wegen der Division mit 100. Eben so wenig das erste Ziffer der Kreutzer; weil bey der Darunterstellung des Divisors 60 das Null dahin trift, und das Uebrige zur Rechten nur durch 6 dividiert werden darf.

Bey der Subtraktion der Unterabtheilungsbenennungen ist weiter eben nichts zu bemerken, als

daß

daß, im Falle der Minuend irgendwo zu klein ist, von der nächst größern Benennung eine Einheit entlehnt, und so viele Einheiten zur Zahl addiert werden, als die Abtheilung in sich faßt. Ein gleiches versteht sich, wenn im Minuend gar keine Zahl einer oder mehrern Benennungen vorfindlich ist. Wir setzen diese zwey Beyspiele. Es soll erstens von 84 fl. 44 kr. 1 pf. abgezogen werden 19 fl. 27 kr. 3 pf.; zweytens soll von 13 Zt. weggenommen werden 7 Zt., 85 Pf., 20 Loth.

I

fl.	kr.	pf.	
	'	(4)	
84	44	1	(1
19	27	3	5 1/1 1
Rest 65 fl.	16 kr.	2 pf.	4
Probe 84	44	1	

II

Zt.	Pfund	Loth
'	(100)	(32)
13	—	—
7	85	20
Rest 5 Zt.	14 Pf.	12 Lt.
Probe 13	—	—

Man thut daher sehr wohl, wenn man das Entlehnte in kleinerer Form darüber schreibt, um die Zahl vor Augen liegen zu haben.

*) Andere Arten von Unterabtheilungsbenennungen z. B. vom Apothecker- und Münzgewicht, Getraidmaase, u. d. gl. sind in meinem größern Werke zu finden.

Die

Die Regeln von derley Additionen und Subtraktionen sind nun kurz beyeinander. diese:

1) Man schreibe die Unterabtheilungen ordentlich untereinander, und fange bey der kleinsten die Operation an.

2) Bey der Addition werden die Summen der Unterabtheilungen, wenn es möglich ist, durch die Division in höhere Benennungen umgeschaffen und hinzu addiert.

3) Bey der Subtraktion wird, wenn eine Zahl im Minuend zu klein ist, von der nächsthöhern Benennung eine Einheit entlehnt, zu Einheiten jener niedrigen Benennung gemacht und dazu addiert.

4) Durch die Probe kann man sich allemal am Ende von der Richtigkeit der Rechnung überzeugen.

Fragen.

Was versteht man durch Unterabtheilungsbenennungen? Was hat man bey Additionen dieser Art vorzüglich zu thun? Man zeige dieß in einem Beyspiele! Wo kann man die Division sogleich in Gedanken verrichten? Was hat man sich bey der Subtraktion zu merken, im Fall eine oder die andere Zahl im Minuend zu klein ist, oder ganz abgeht? Ein Beyspiel hierüber! Wie sieht die Probe hievon aus? Wie heißen die Regeln kurz zusamm gezogen?

Exempel.

a) Ein Student soll zu Ende des Schuljahrs seinem Kostherrn folgenden Konto bezahlen: Tischgeld 38 fl. 36 kr. Für den Trunk 11 fl. 44 kr. 3 pf. Bettgeld 8 fl. Für Reparation der Kleider 5 fl. 56 kr. 2 pf. Für Papier, Federn

und

und so andern Kleinigkeiten 1 fl. 46 kr. 1 pf. Für die Aufwartung 3 fl. Rekrationsgeld 2 fl. 43 kr. 2 pf.; was beträgt dieß?

Operation.

fl.	kr.	pf.	
3 8	3 6	—	8 1/1 2 kr.
1 1	4 4	3	4
8	—	—	
5	5 6	2	(4
1	4 6	1	22 1/6 3 fl.
3	—	—	
2	4 3	2	
71 fl.	47 kr.	— pf.	

b) Karl bekömmt von seinem Herrn Vater 2 fl. 33 kr, pf. Spielgeld. Nach geendigtem Spiele zählte er nur mehr fl. 52 kr. 3 pf.; was hatte er verlohren?

Operation.

fl.	kr. (60)	pf. (4)
2	3 3	1
1	5 2	3
— fl.	40 kr.	2 pf.

c) Jemand wurde gebohren 1725 den 3ten September um 8 Uhr Abends, und starb 1784 den 29igsten März um 3 Uhr früh; wie alt ist er geworden?

Operation.

Jahre	Monate (12)	Tage	Stunden (24)
1784	3	29	3
1725	9	3	20
58 Jahr	6 Monat	25 Tage	7 St.

d) Ein

d) Ein anderer ist nach so einer Berechnung 73 Jahre, 11 Monate, 13 Tage, und 9 Stunden alt geworden, und starb 1794 den 7ten May um 6 Uhr Abends; wann ist er gebohren worden?

Operation.

Jahre	Monate (12)	Tage (30)	Stunden
1794	5	7	18
73	11	13	9
1720 Jahr	5 Monat	24 Tag	9 St.

Folglich wurde er gebohren 1720 den 24igsten May um 9 Uhr früh.

§. 7.

Von gebrochnen Zahlen und ihren Rechnungsarten.

Wo man etwas zerbricht, da giebt es Theile, Bruchstücke ab; und daher kömmt sehr natürlich die Benennung gebrochner Zahlen, Brüche, Fraktionen. Nur müssen hier die Theile durchgehends gleich gemacht werden, und man muß nothwendig noch überdieß wissen, in wie viel solcher Theile das Ganze getheilt worden sey, oder wenigst so zertheilt gedacht werden müsse.

Ein Bruch ist daher ein Theil, oder mehrere gleiche Theile vom nämlichen Ganzen. Bey jedem Bruche müssen zwey Dinge ausgedrückt werden: erstens in wie viel Theile das Ganze getheilt werden soll, oder schon getheilt worden ist; und zweytens wie viel solcher Theile zum Werthe des Bruches

hes gehören. Zum Beyspiel 3 Viertelgulden: das Wort Viertel sagt, daß man sich den Gulden in gleiche Theile getheilt denken müsse, und daß nun solcher Theile den Werth des Bruches ausmachen. Viertel ist also nur der Name von den Theilen, und 3 ist die eigentliche Zahl des Bruches. Man rückt diesen Name auch durchgehends mit einer Zahl aus, und schreibt sie unter die Anzahl der Theile durch eine Zwerchlinie abgesondert hin, z. E. $\frac{3}{4}$. Man heißt selbe den Nenner des Bruches, weil er nennet, was es für Theile sind, Fünftel, Achtel, Hundertel u. d. gl. Die Zahl selbst, welche sagt, wie viel es solcher Theile sind, wird Zähler genennt.

Es hängt daher der Werth des Bruches von Zähler und Nenner zugleich ab. Je mehr von den nämlichen Theilen da sind, oder mit andern Worten, je stärker der Zähler ist, desto größer ist der Werth des Bruches: je größer hingegen beym nämlichen Zähler der Nenner ist, das heißt, in je mehr Theile das Ganze muß getheilt werden, desto kleiner fällt der Werth des Bruches aus. So ist z. B. $\frac{3}{8}$ halb so klein als $\frac{3}{4}$, weil man aus dem Ganzen noch so viele Theile gemacht; folglich sind sie auch halb so klein geworden, als die Viertel.

Man theilt die Brüche ein in eigentliche und uneigentliche. Eigentlich sind sie, wenn sie kein Ganzes betragen: uneigentlich, wenn sie genau ein Ganzes oder darüber ausmachen. So sind $\frac{7}{7}$, $\frac{13}{8}$ u. d. gl. uneigentliche Brüche. Man erkennt sie gleich aus ihrem Anblicke; wenn der Zähler kleiner ist als der Nenner, so werden es eigentliche Brüche seyn; im widrigen Falle uneigentliche; denn

sind es gerade so viele Theile, als sich aus dem Ganzen machen lassen, oder gar noch mehr, so muß natürlich der Bruch auch mehr als ein Ganzes enthalten. Allein wie können aus ein und dem nämlichen Ganzen mehr Theile gemacht werden, als es enthält? Das eben nicht; aber die Theile können ja von mehrern gleichartigen Ganzen seyn. Es kann sich ja fügen, daß zween Aepfel, jeder in 4 gleiche Theile getheilt werden, und daß Jemand 5 oder 6 solcher Theile nimmt. In diesem Falle sind nun immerhin $\frac{5}{4}$ oder $\frac{6}{4}$ Aepfel gedenkbar, und so von andern zu reden.

Eine Haupteigenschaft der Brüche ist, daß ein und der nämliche Bruch tausenderley Gestalten anzunehmen vermögend ist, ohne eben seinen Werth verändern zu müssen. Der obige Bruch $\frac{3}{4}$ kann auch z. B. $\frac{6}{8}$, $\frac{15}{20}$, $\frac{21}{28}$ u. s. f. heißen, und es ist sein Werth nicht im mindesten geändert worden. Man darf nur Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl multiplicieren, so bleibt der Werth des Bruches allemal; denn dadurch werden die Theile gerade um so viel mehr gemacht, als sie kleiner geworden; $\frac{6}{8}$ hat zwar noch so viele Theile als $\frac{3}{4}$, aber die Theile sind noch so klein geworden; weil man das Ganze in noch so viele Theile theilen mußte. Was daher der Bruch einerseits durch die Multiplikation des Zählers gewinnt, das verliert er andererseits durch die Multiplikation des Nenners.

Aus gleichen Gründen ist es auch umgekehrt richtig, daß man Zähler und Nenner eines Bruches durch die nämliche Zahl dividieren dörfe, ohne daß der Bruch in sich selbst geändert werde; denn durch die Division des Zählers verliert zwar der Bruch,

aber

ber er gewinnt in dem nämlichen Maaße bey der Division des Nenners; weil dadurch die Theile gegen das größer geworden, um was sie itzt we-ger sind.

Diese zwote Eigenschaft der Brüche kömmt ns oft sehr gut zu statten. Wir können dadurch cht selten großzahlichten Brüchen eine geschmeidi-re Gestalt ertheilen, wodurch theils ihr Werth er erkannt, theils die Rechnung mit solchen Brü-en erleichtert wird. Nehmen wir als Beyspiel n Bruch $\frac{18}{27}$ fl. her. So wie er ist, kennt man ms nicht sogleich an, daß sein Werth 40 kr. betra-; wenn man ihn aber überall durch 9 dividiert, entsteht der ungleich kürzere Ausdruck $\frac{2}{3}$; weil nun weiß, daß der dritte Theil eines Guldens kr. beträgt, so kann ich leicht abnehmen, daß een solche Drittheile 40 kr. werth seyn müssen. s heißt demnach einen Bruch verkleinern nichts ders, als Zähler und Nenner desselben durch eine d die nämliche Zahl ohne Rest dividieren.

Es giebt auch einige Regeln, wodurch man erken-n kann, ob und durch welche Zahl sich ein Bruch rkleinern läßt: denn daß die Sache nicht allemal geht, ist außer Zweifel gesetzt. Wenn die End-fer des Zählers und Nenners gerade sind, das 2, 4, 6, 8, 0, so läßt sich der Bruch allemal durch verkleinern. Wenn man die Ziffer des Nenners, wie des Zählers überall in eine Summe bringt, d prüft, ob sich diese Summen durch 3 dividieren ssen, so lassen sich auch Nenner und Zähler selbst idieren. Z. B. $\frac{2211}{5190}$, wo vom Zähler die Summe

$$\overset{3}{\smile}$$

und vom Nenner 15 ist. Daher $\frac{2211}{5190} = \frac{737}{1730}$.

Wenn die Endziffer überall Nullen sind, so kann mittels Hinwegschneidung gleichvieler Nullen durch 10, 100 u. s. f. dividiert werden. Ist das Endziffer überall 5 oder einmal 0 und einmal 5, so kann durch 5 verkleinert werden.

*) In dem größern Werke ist auch eine Anweisung gegeben, wodurch man sicher überzeugt werden kann, ob und durch was für eine Zahl sich ein großzahlichter Bruch verkleinern lasse.

Da Zahlen, um sie addieren zu können, gleiche Benennung haben müssen, so ist bey Brüchen nothwendig, daß, wenn sie addiert werden sollen, ihre Nenner gleich sind; denn die Zähler sind eigentlich die Zahlen der Brüche; die Nenner hingegen sind nur die Nämen dieser Zahlen; daher müssen sie gleich seyn. Bey der Addition selbst werden nur die Zähler zusammaddiert, und der Nenner wieder darunter geschrieben; indem der Name der Zahlen durch die Addition nicht geändert werden kann. Es ist daher $\frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{7}{10} = \frac{11}{10}$; denn würde man den Nenner durch Worte ausdrücken, z. B. 1 Zehntl, 3 Zehntl und 7 Zehntl, so giebt ihre Summe unfehlbar 11 Zehntl.

Wenn die Summe ein uneigentlicher Bruch wird, so können die Ganzen allemal durch die Division herausgehoben werden; so ist $\frac{11}{10} = 1 + \frac{1}{10}$ oder $1\frac{1}{10}$.

Sind die Nenner nicht gleich, so können sie doch durch einen Kunstgriff gleich gemacht werden. Es darf nur Zähler und Nenner eines jeden Bruches mit den Nennern aller übrigen Brüche multipliciert werden; weil durch die Multiplikation mit den nämlichen Faktorn bey Zähler und Nenner die

Werthe

Werthe der Brüche, gemäß der ersten Haupteigen-
haft derselben, nicht geändert werden; und weil
ey jedem Nenner, wegen der Zusammenkunft der
ämlichen Faktorn, die Produkte, folglich auch die
uen Nenner, Gleichheit erhalten. Es sollen z. E.
e Brüche $\frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{4}{5}$ gleiche Nenner bekommen,
d die Sache wird anschaulich seyn.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{4}{5} = \frac{2 \times 8 \times 5}{3 \times 8 \times 5} + \frac{1 \times 3 \times 5}{8 \times 3 \times 5} + \frac{4 \times 3 \times 8}{5 \times 3 \times 8} = \frac{80}{120} + \frac{15}{120} + \frac{96}{120},$$

welche
an Kürze halber auch so schreiben kann $\frac{80+15+96}{120}$.
ber nehmen wir nur zween Brüche, etwa $\frac{3}{7} + \frac{2}{9}$
$\frac{\times 9}{\times 9} + \frac{2 \times 7}{9 \times 7} = \frac{27}{63} + \frac{14}{63}$.

Es lassen sich demnach alle Brüche addieren;
il man ihnen gleiche Nenner zu geben im Stan-
ist.

Da Subtraktion eben so gut Gleichartigkeit
Zahlen, wie die Addition fodert; so müssen auch
rüche, wenn sie voneinander subtrahiert werden
len, entweders schon gleiche Nenner haben, oder
widrigen Falle, nach der vorhergehenden Me-
de, zu gleichen Nennern gebracht werden. Wir
llen einsweilen nur zwey Exempel vor die Hand
men, eins, wo schon gleiche Nenner da sind,
andere, wo selbe erst hergeschaft werden müssen.
e heißen meinetwegen $\frac{13}{25} - \frac{7}{25}$ und $\frac{8}{9} - \frac{3}{5}$.
s erste giebt ohne weiters zum Reste $\frac{6}{25}$, das
yte aber bekömmt zuvor wegen gleichen Nennern
se Gestalt: $\frac{40}{45} - \frac{27}{45}$, und läßt zum Rest $\frac{13}{45}$.

Manchmal ereignen sich die Fälle, daß Brüche
ganzen Zahlen abgezogen werden sollen, z. B.
$- \frac{3}{8}$. Hier thut man am besten, wenn man

von

von der Zahl eine Einheit entlehnt und sie zu einem uneigentlichen Bruch von dem nämlichen Nenner macht, den der Subtrahendbruch hat. Das Uebrige ergiebt sich von selbst.

5′ $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ also ist der Rest $4\frac{5}{8}$.

Bey Bruchsubtraktionen übrigt noch ein Fall, welchen wir nicht ungerüget lassen dörfen. Es kann sich fügen, daß ein Bruch von einer gemischten Zahl, die nämlich aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, wie $4\frac{1}{2}$, abgezogen werden soll, wo der dabey befindliche Bruch dem Werthe nach kleiner als der Subtrahend ist. Wir wollen $7\frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ setzen. Wenn hier die Nenner der Brüche gleich gemacht werden, so erscheint $\frac{4}{12} - \frac{9}{12}$ und man sieht, daß sich 9 von 4 schlechterdings nicht abziehen läßt. Man muß daher bey solchen Ereignissen von der ganzen Zahl wieder eine Einheit entlehnen und zum Minuendbruche addieren: dieß kann aber geschehen, wenn man die Einheit, wie vorher, zu einen uneigentlichen Bruch vom nämlichen Nenner macht, den der zukleine Minuendbruch wirklich schon hat. Im gegenwärtigen Beyspiele muß die entlehnte Einheit zum Bruch $\frac{3}{3}$ gemacht werden, weil der Bruch, dem diese Einheit beygesetzt werden soll, ebenfalls $\frac{1}{3}$ heißt. Die weitere Rechnung fällt nun so aus:

7′ $\frac{3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$

oder $\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = \frac{16}{12} - \frac{9}{12} = \frac{7}{12}$.

Also der Rest $6\frac{7}{12}$.

Hieher gehören auch die Beyspiele, wo lauter gemischte Zahlen vorkommen, und sich doch Bruch

von

von Bruch nicht abziehen läßt, wie etwa $11\frac{2}{5} - 5\frac{6}{7}$, welches folgende Rechnung giebt:

11′

6 $\quad \frac{5}{5} + \frac{2}{5} - \frac{6}{7}$

4

oder $\frac{7}{5} - \frac{6}{7} = \frac{49-30}{35} = \frac{19}{35}$

Rest also $4\frac{19}{35}$.

Ehe wir zu den fernern Rechnungsarten der Brüche übergehen, müssen wir vorläufig ein Paar Worte von der Reduktion und von der Auflösung der Brüche sprechen. Man versteht unter Reduktion jene arithmetische Verrichtung, wodurch man gemischte Zahlen zu uneigentlichen Brüchen umschaffet. Z. B. $2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$; denn ein Ganzes hat 4 Viertel, folglich 2 Ganze 8 Viertel, welche mit den 3 Vierteln des Bruches selbst 11 Viertel geben. Es wird daher zur Reduktion solcher gemischten Zahlen nicht mehr erfordert, als daß die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruches multipliciert, und zum Produkt der Zähler addiert wird. Man sagt demnach im obigen Beyspiele 4 mal 2 ist 8 und 3 ist 11. Denn jede ganze Zahl läßt sich durch einen Bruch vorstellen, dessen Nenner die Einheit ist: folglich besteht die gemischte Zahl aus zween Brüchen, die zur gleichen Benennung gebracht zu werden verlangen, wo dann die Operation die nämliche seyn wird

$$\frac{2}{1} + \frac{3}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4}$$

Auflösung der Brüche heißt jene Verfahrungsart, wodurch man den Werth des Bruches in kleineren Unterabtheilungsbenennungen zu bestimmen sucht,

z. B.

z. B. einen Guldenbruch in Kreutzern, Pfenningen u. d. gl. einen Zentnerbruch in Pfunden, Lothen, u. s. f. Da nun der Zähler des Bruches eigentlich die Zahl ist, welche, weil sie zu klein ist, durch den Nenner nicht dividiert werden kann; so wird natürlich die Division eher möglich seyn, wenn man diese Zahl in eine kleinere Unterabtheilungsforte verwandelt. Z. B. $\frac{2}{3}$ fl., wenn man hier die 2 fl., welche durch 3 nicht dividiert werden können, zu Kreutzer macht, so geben selbe 60 × 2 = 120; folglich ist 120 : 3 = 40 kr. der Werth des Bruches.

Geht die Division nicht auf, so wird das Residuum entweder als ein neuer Bruch dem Quotus wieder angehängt: oder wenn es möglich ist, und es der Mühe lohnt, in eine noch kleinere Unterabtheilungsforte verwandelt, und mehrmals dividiert.

Läßt jene Einheit, wovon der Zähler eines Bruches Theile enthält, keine Unterabtheilung mehr zu, so ist auch der Bruch keiner weitern Auflösung fähig. Z. B. $\frac{1}{2}$ Baurenhof, $\frac{3}{4}$ Klafter Holz, $\frac{2}{3}$ Häller u. d. gl.

Endlich wollen wir auch Brüche multiplicieren und dividieren lernen. Einen Bruch durch eine ganze Zahl multiplicieren oder dividieren kann nicht schwer seyn; denn weil eigentlich der Zähler, wie ich schon öfter sagte, die Zahl des Bruches, und der Nenner nur der Name davon ist, so muß natürlich nur der Zähler multipliciert werden, und der Nenner bleibt wieder der vorige. Z. B. $\frac{3}{10} \times 4 = \frac{12}{10} = 1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$, und $\frac{8}{11} : 2 = \frac{4}{11}$. Geht die Division beym Zähler gähling nicht auf, so darf statt der Division nur der Nenner multipliciert werden; weil der Werth des Bruches, wie

gleich

leich anfänglich erinnert worden, gerade um so iel kleiner wird, je größer man den Nenner macht, . E. $\frac{5}{9} : 2 = \frac{5}{18}$.

Nun gehen wir über auf solche Multiplikatio- en der Brüche, wo ein oder beyde Brüche die inheit zum Zähler haben. Es soll, setzen wir, $\frac{5}{8}$ urch $\frac{1}{4}$ multipliciert werden, das heißt mit andern orten, es soll $\frac{5}{8}$ einviertelmal genommen werden; un aber den vierten Theil von $\frac{5}{8}$ zu bestimmen, uß der Bruch $\frac{5}{8}$ durch die ganze Zahl 4 dividiert erden. Brüche werden aber, wie wir so eben ge- ört haben, dadurch dividiert, wenn man den Nen- er multipliciert; folglich ist $\frac{5}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{8} : 4 = \frac{5}{32}$. s wäre aber das Nämliche herausgekommen, wenn ir sogleich in der ersten Stellung $\frac{5}{8} \times \frac{1}{4}$ Zähler it Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert ätten.

Andere Brüche, deren Zähler größer als die inheit ist, lassen sich allemal in solche zween Fak- oren zerfällen, wovon einer eine ganze Zahl, und er andere ein Bruch mit den Einheitszähler ist, . B. $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2$ oder $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3$. Es darf emnach der Multiplikator nur allemal auf eine olche Weise zerfället und der Multiplikand auf weymal multipliciert werden, wie etwa $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ $= \frac{4}{5} \times 2 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{5} : 3 = \frac{8}{15}$; oraus man wiederum abnimmt, daß gleichfalls das ämliche herauskömmt, wenn man in der ersten, rsprünglichen Stellung solcher Brüche $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$ nur gleich Zähler mit Zähler und Nenner durch Nen- er multipliciert. Wir dörfen demnach bey Multi- icierung der Brüche als eine Universalregel an-

neh-

nehmen, daß allemal Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliciert werden dörfen.

Wenn sich gemischte Zahlen als Faktores einfinden, so kann man ihnen durch die Reduktion gar leicht die Bruchgestalt ertheilen; auch sogar ganze Zahlen darf man, wenn man will, als Brüche auftretten lassen, wenn man ihnen die Einheit als Nenner unterstellt, und die Regel geht wieder allgemein fort: z. E. $7\frac{1}{4} \times 5 = \frac{29}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{145}{4} = 36\frac{1}{4}$.

Endlich kommen wir auf die Division der Brüche durch Brüche. Weil Division, als entgegengesetzte Rechnungsart, die Probe der Multiplikation ist, so muß ganz natürlich bey der Operation gerade umgekehrt verfahren werden. Bey der Multiplikation multipliciert man Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner: es ist daher nothwendig, daß man hier auch Zähler durch Zähler und Nenner durch Nenner dividiere, als $\frac{8}{9} : \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Aber was thut man, wenn die Division irgendwo gähling nicht aufgeht? Auch hier ist bald geholfen. Nur den andern Theil des Dividendbruches multipliciert: geht der Zähler nicht auf, so multipliciere man den Nenner; und geht der Nenner nicht auf, so multipliciere man den Zähler. Denn durch das Dividieren des Zählers verliert der Werth des Bruches; er verliert aber auch das Nämliche durch die Multiplikation des Nenners. Ferners, durch die Division des Nenners gewinnt der Werth des Bruches; er gewinnt aber in eben dem Grade durch die Multiplikation des Zählers. Die Ursache davon ist schon gleich anfangs gegeben wor-

)orden. Man darf daher diese Rechnungsarten nmerhin mit Vortheil verwechseln. Folglich kömmt an am leichtesten davon, es mögen die Divisionen ufgehen oder nicht, wenn man sogleich Zähler und enner des Divisorbruches verkehrt anschreibt, das eißt, den Divisorbruch umstürzt, und nachher die niversalregel der Multiplikation befolgt. Z. E. $: \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45}$. Gemischte oder ganze ahlen können keine Ausnahm machen, weil man icht im Stande ist, ihnen die Bruchgestalt zu er- eilen, z. B. $1\frac{2}{5} : 4 = \frac{7}{5} : \frac{4}{1} = \frac{7}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{20}$.

Ehe wir diesen Artikel endigen, müssen wir vo Hauptbemerkungen bey den Rechnungsarten in Brüchen anführen, und dann auch ihren Grund ngeben. Multiplicieren heißt vermehren; dividieren ingegen theilen — vermindern: und trotz dieser llgemeinen Begriffe wird das Produkt zweener ei- entlicher Brüche immer kleiner als ein Faktor wer- en: der Quotus hingegen durchgehends größer als er Dividend erscheinen. Woher kömmt dieß wi- ersprechende Ereigniß? Lediglich daher, weil hier)wohl Multiplikator als Divisor kleiner als die Einheit ist. Denn ist Multiplikator und Divisor erade eins, so bleibt Multiplikand und Dividend ngeändert: sind hingegen diese beyden Zahlen grö- er als eins, so muß auch das Produkt größer ls der Multiplikand, und der Quotus kleiner als er Dividend werden. Was folgt nun natürlicher, ls daß bey Multiplikatorn, die kleiner als die Einheit sind, so wie bey solchen Divisorn das Ge- gentheil statt hat? Es muß nothwendig das Pro-)ukt kleiner als der Multiplikand, und der Quotus größer als der Dividend werden. Deutlicher, denke ch, kann die Sache nicht mehr erklärt werden.

Nun

Nun wollen wir diese kurze Lehre von Brüchen in etliche praktische Sätze zusamm ziehen.

1) Brüche können, ohne ihren Werth zu ändern, eine kleinere Gestalt bekommen, wenn man Zähler und Nenner durch eine gemeinschaftliche Zahl ohne Rest zu dividieren im Stande ist.

2) Brüche, wenn sie gleiche Nenner haben, werden addiert und subtrahiert, wenn man diese Rechnungsarten bloß mit den Zählern vornimmt, und den Nenner wieder unter die Summe oder Rest schreibt.

3) Sind die Nenner ungleich, so werden sie durch folgende Regel zu gleichen Nennern gebracht: Man multipliciere jeden Zähler mit den Nennern aller übrigen Brüche, so erhält man so viele Produkte als Brüche sind, welche Produkte nun die neuen Zähler vorstellen, und zum gemeinschaftlichen Nenner das Produkt aus den Nennern aller Brüche zugleich haben.

4) Soll ein Bruch von einer ganzen Zahl abgezogen werden, so darf man nur den Zähler vom Nenner abziehen, den Nenner wieder unter den Rest setzen, und die Zahl selbst um eins kleiner machen.

5) Soll ein Bruch von einer gemischten Zahl abgezogen werden, dessen Bruch einen kleinern Werth als der Subtrahend hat, so addiere man, wenn die Nenner gleich gemacht sind, Zähler und Nenner des Minuendbruches zusamm, und ziehe alsdann von der Summ ab. Die dabeystehende Zahl ist dadurch um eins kleiner geworden.

6) Brüche werden reduziert, wenn man die nze Zahl durch den Nenner des angehängten ruches multipliciert, den Zähler dazu addiert, d den Nenner wieder unter diese erhaltne Zahl llt.

7) Brüche werden aufgelöset, wenn man den hler des Bruches durch die Multiplikation in e kleinere Unterabtheilungsbenennung verwandelt, d das Produkt durch den Nenner dividiert.

8) Bey der Multiplikation der Brüche durch rüche werden Zähler mit Zähler und Nenner mit enner multipliciert.

9) Bey der Division der Brüche durch Brüche rd der Divisor umgestürzt, und die obige Regel r Multiplikation angewendet.

10) Gemischte Zahlen, wenn sie bey diesen zten beyden Rechnungsarten etwa Schwierigkeiten ranlassen sollen, können durch Reduktion allemal ld in uneigentliche Brüche umgeschaffen werden. uch ganze Zahlen sind nicht ausgenommen, weil an ihnen nur die Einheit zum Nenner geben darf, n ebenfalls Brüche vorzustellen.

Fragen.

Woher kömmt die Benennung, gebrochne Zahlen, rüche, Fraktionen? Was ist bey Brüchen in Rücksicht r Theile nothwendig? Was ist eigentlich ein Bruch? Wie ele Dinge müssen bey Brüchen sichtbar gemacht werden? as heißt Nenner, was Zähler und warum? Wovon hängt r Werth eines Bruches ab? Wie läßt sich dieses doppelte bhängen erklären? Wie werden Brüche eingetheilt? Wann nd Brüche eigentlich, wann uneigentlich? Wie läßt sich die

Möglichkeit der uneigentlichen Brüche erklären? Was haben Brüche für eine Haupteigenschaft? Wo liegt der Grund dieser Eigenschaft? Was haben Brüche noch für eine andere entgegengesetzte Eigenschaft? Was ist die Ursache davon? Hat diese Eigenschaft auch einen Nutzen? Welche Regeln giebt es, um zu erkennen, wodurch sich ein Bruch verkleinern läßt? Wann lassen sich Brüche addieren und warum? Wie werden Brüche mit gleichen Nennern addiert? Was ist mit Summen anzufangen wenn sie uneigentliche Brüche sind? Wie können Brüche zu gleichen Nennern gebracht werden? Wo liegt der Grund dieses Verfahrens? Was ist bey der Subtraktion in Brüchen zu merken? Was ist in Fällen zu thun, wenn Brüche von ganzen Zahlen abgezogen werden sollen? Was sind gemischte Zahlen? Wie sollen Brüche von gemischten Zahlen abgezogen werden, wo die dabey befindlichen Brüche zum Abziehen zu klein sind? Welche Beyspiele gehören noch hieher? Was versteht man unter Reduktion der Brüche? Was unter Auflösung der Brüche? Läßt sich bey jedem Bruch die Auflösung anwenden? Wie wird ein Bruch durch eine ganze Zahl multipliciert, und warum? Wie durch einem Bruch, dessen Zähler die Einheit ist? Wo liegt der Grund dieses Verfahrens? Wie werden Brüche auch durch andere Brüche multiplicieret? Welche Universalregel läßt sich daraus herleiten? Wie lassen sich gemischte Zahlen durch Brüche, oder ebenfalls wieder durch gemischte Zahlen multiplicieren? Wie werden Brüche durch Brüche dividiert? Wo ist der Beweis dafür? Wie heißt überhaupts die kurze Regel davon? Wie kömmt es, daß die Produkte der Brüche allzeit kleiner als der Multiplikand, und der Quotus größer als der Dividend wird? Wie heißen alle Regeln, die bey Brüchen anzuwenden sind, im Kurzen dargestellt?

Exem-

Exempel.

a) Ein Vater ließ seinen 4 Söhnen Röcke vom nämlichen
he machen. Auf die Frage, wie viel Ellen wohl jeder
nöthen hätte, lautete die Antwort des Schneiders so:
wig braucht $4\frac{1}{2}$ Ellen, Franz $3\frac{5}{6}$, Aloys $3\frac{3}{8}$ und
kleine Joseph $2\frac{2}{3}$ Ellen. Wie viel Tuch muß nun der
er kaufen?

Operation.

Ganze	Brüche
4	$\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{3}{8} + \frac{2}{3}$
3	
3	144
2	240
(2)	108
	192
w. $14\frac{3}{8}$ Ellen.	684 | 2
	288 |
	576
	108

$2\frac{54}{144}$ | 2 | $\frac{27}{72}$ | 9 | $\frac{3}{8}$

b) Fritz und Paul ließen sich einmal wägen. Als sie
ten, wie schwer jeder wäre, antwortete der Wagmeister:
z wiegt $\frac{5}{8}$ Zentner und Paul $\frac{3}{5}$; um wie viel ist Fritz
verer als Paul? und was betragen beyde Zentnerbrüche
Pfunden?

Operationen.

I

$\frac{5}{8} - \frac{3}{5}$

25
24

Um $\frac{1}{40}$ Zt. ist Fritz schwerer als Paul.

$\frac{5}{8}$ 100 — 5 — 24 — 500 — 88 — $62\frac{1}{2}$ ℔

$\frac{3}{5}$ 100 — 3 — 300 — 55 — 60 ℔

c) Ein andermal stellten sie sich unter das Soldatenmaaß und erfuhren, daß Fritz $4\frac{1}{4}$ Schuhe, und Paul $3\frac{7}{8}$ Schuhe habe; um wie viel ist Fritz größer als Paul?

Operation.

4 — 3 — 0

$\frac{5}{4} - \frac{7}{8}$

40 — 28 — 12 — 48 $= \frac{1}{4}$ Schuh oder 3 Zoll.

d) Ein Vater versprach seiner fleißigen Tochter, daß er die Anzahl der Pfunde, die sie an Flachs spinnen würde, allemal mit $\frac{5}{8}$ fl. multiplicieren und ihr den Betrag schenken wolle. Es wurde alle Vierteljahre abgerechnet, und sie machte in einem Jahre folgende Lieferungen: 3, $2\frac{2}{3}$, $1\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{8}$ ℔; was bekam sie allemal?

Operationen.

I $1\frac{3}{1} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ fl.

II $2\frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{8}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{40}{24} = 1\frac{16}{24} = 1\frac{2}{3}$ fl.

III $1\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{7}{4} \times \frac{5}{8} = \frac{35}{32} = 1\frac{3}{32}$ fl.

IV $3\frac{1}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{125}{64} = 1\frac{61}{64}$ fl.

e) Eine

e) Eine kupferne Flasche hält $9\frac{3}{4}$ Maaß; wie oft kann an mit selber ein Trinkglas anfüllen, welches $\frac{2}{3}$ Maaß fasset?

Operation:

$9\frac{3}{4} : \frac{2}{3} = \frac{39}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{117}{8} = 14\frac{5}{8}$; also cht gar 15mal.

§. 8.

Von der Regel Detri.

Wenn ich rechnen soll, was z. B. 6 Pfunde n dieser oder jener Waare kosten, so muß ich ssen, wie theuer ein oder mehrere Pfunde von r nämlichen Sorte bezahlt werden. So geht es y allen Rechnungen dieser Gattung; es müssen ey Zahlen bekannt seyn, wenn eine vierte davon hängende Zahl gefunden werden soll. Eine ist Fragezahl, die zwote hat mit der Fragezahl iche Benennung, oder ist wenigst von der näm- hen Art, und die dritte giebt den Betrag dieser oten an. Es ist daher die Regel Detri nichts ders als eine Anweisung, aus drey Zahlen eine rte davon abhängende Zahl zu finden. Man nnt sie auch die goldne Regel, weil dadurch bey- he alle Rechnungen, die im gemeinen Handel und andel vorkommen, geführt werden können.

Im Anschreiben befolgt sie dieß Gesetz, daß man Fragezahl, das ist, jene Zahl, wegen welcher entlich gefragt wird, zuletzt anschreibt; die Zahl er, die mit der Fragezahl entweders schon gleiche enennung hat, oder doch durch die Reduktion er dieser beyden Zahlen bekommen kann, wird

zu Anfang gesetzt; und nun bleibt für die dritte Größe, die den Betrag der eben genannten Zahl anzeigt, der mittlere Platz übrig. Man heißt dieß die drey Sätze der Regel Detri. Die Aufgabe (wir wollen die nächste beßte vor die Hand nehmen): Was kosten 16 Stück, wenn 1 Stück 33 kr. beträgt? wird demnach so stehen müssen:

Stück	kr.	Stücke?
1	33	16

Die Berechnung selbst, in solchen Fällen, wo der erste Satz eins ist, und auch nach einer allenfalsigen Reduktion noch eins bleibt, wird bald gemacht seyn; denn man darf nur die beyden letztern Sätze mit einander multiplicieren, so kömmt der gesuchte Betrag zum Vorschein und zwar unter einer solchen Benennung, wie der mittlere Satz hat. Der Beweis hievon ist leicht; denn zwey Stücke betragen doppelt so viel als eins: drey Stück dreymal so viel als eins, vier Stück viermal so viel als eins u. s. f. Ueberhaupt also machen viele Stücke gerade vielmal so viel als eins, welches daher allemal die Multiplikation leistet. Wenn man nun in unserm Exempel die zween letzten Sätze 16 und 33 durcheinander multipliciert, so erscheint das Produkt 528 kr.; dieß zu Gulden gemacht, giebt 8 fl. 48 kr.

Wir müssen auch ein Beyspiel vor die Hand uehmen, wo Reduktion nöthig ist. Wie hoch kommen z. E. 56 Pfunde, wenn das Loth 3 kr. 3 pf. kostet?

Ansatz

Ansatz und Berechnung.

Loth	kr.	pf.	℔
1	3	3	56
	4		32
	15		112
			168
			1792
			15
			8960
			1792

2 | 1
26880 | 6720 | 112 kr.
444 | 6660

Nach der Reduktion hieß der Ansatz, wenn an ihn wiederholen wollte, eigentlich so:

Loth	pf.	Loth
1	15	1792

s erscheint daher die Antwort in lauter Pfennins n; weil der mittlere Satz Pfenninge enthält. Es also nöthig, daß man sie allererst in Kreutzer, d dann in Gulden verwandle, welches oben durch e Division mit 4 und 60 geschah.

Auch Brüche fodern die Reduktion; indem, e ich schon öfter erinnerte, die Zähler die Zahlen r Brüche, die Nenner aber die Benennung der- ben sind. Ich setze das Beyspiel: $\frac{1}{3}$ Elle kostet $\frac{1}{2}$ fl., was machen 17 Ellen?

68

Ansatz und Berechnung.

Elle	fl.	Ellen?
$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{8}$	17
	9	3
		51 Drittelellen.
3		9
459 1 57 $\frac{3}{8}$ fl.		459 Achtelgulden.
88 1		

Nach der Reduktion muß man sich also folgende Anschreibung denken:

Drittelelle	Achtelgulden	Drittelellen?
1	9	51

Sollte gähling der letzte Satz noch nebendem, daß der erste Satz ein Bruch ist, eine größere Unterabtheilungsforte enthalten, so muß gleichwohl vor allem in diesem Stücke Gleichheit hergestellt werden. Ein Exempel: $\frac{1}{4}$ ℔ kostet 7 kr. 1 pf., was machen 16 Zt.?

Operation.

℔	kr.	pf.	Zt.?
$\frac{1}{4}$	7	1	16
	4		100
	29		1600
			4
			6400
			29
			576
			128
			185600

21 42(3
285600 1 464 00 1 773 fl. 20 kr.
444 1 6660 1

Oft

Oft frägt man auch aus dem Betrag des
lehrfachen um den Betrag des Einfachen. Z. B.
Stück kosten 5 fl. 24 kr., was kostet 1 Stück?
ey dergleichen Foderungen wird der letzte Satz
mer eine Einheit seyn. Wir wollen nun bald
s der Natur der Sache eine Regel dafür ausfin-
g machen. Es ist unläugbar, daß ein Stück halb
viel, als zwey Stück koste; ein Stück ein drittl
viel, als drey Stück; ein viertl so viel, als vier
tück u. s. f. Man erhält aber die Hälfte, den
itten Theil u. s. w., wenn man durch 2, 3 &c.
vidiert: Folglich heißt die Regel in solchen Fällen:
s muß der mittlere Satz durch den ersten di-
diert werden.

Ansatz und Berechnung.

St.	fl.	kr.	St.?
8	5	24	x

60
3 2 4 | 40 kr.
8 8 |
4
x 6 | 2 pf.
8 |

ey der ersten Division blieben noch 4 kr. übrig;
mußten also zu Pfenninge gemacht werden, um
ch dividieren zu können; und dann erhielt man
ch 2 pf.

Die Probe wird gemacht, wenn man das Exem-
l umkehrt, und sagt: 1 Stück kostet 40 kr. 2 pf.
as betragen 8 Stück?

St.

1 St.	kr.	pf.	St.
1	40	2	8
	4		
	162		
	8		
	1296	1/3	(240 1/5 fl. 24 kr.
	444		60

Auch von den erstern Beyspielen sind wir itzt im Stande die Probe zu machen; weil der Ansatz bloß umgekehrt werden darf.

Sind die Unterabtheilungsforten des ersten Satzes größer als des letzten, so muß der erste Satz durch Multiplikation die nämliche Benennung zu erhalten suchen, wie der letzte hat. Z. B. 9 Pfund Zucker werden gekauft für 13 fl. 20 kr., wie hoch kömmt das Loth?

Ansatz und Berechnung.

℔	fl.	kr.	Loth?
9	13	20	1
32	60		
288 Loth	800	1/2 kr.	
	288		
	576		
	224		
	4	2	3 2 1
896	1/3	316/144 1/2	2/18 1/9 pf.
288			
864	Es kostet daher das Loth		
32	2 kr. 3 1/9 pf.		

Pro-

Probe.

Loth	kr.	pf.	Lb?
1	2	$3\frac{1}{9}$	9
	4		32
	11		288
	9		100
	100		28800 Neuntelpfen.

x 2(2
8800 | 3200 | 800 | 13 fl. 20 kr.
99 | 4 | 660 |

ist der letzte Satz ein Bruch, der zum Zähler die Einheit hat, aber übrigens zur nämlichen Unterabtheilungssorte, wie der erste Satz gehört, so muß gleichwohl der erste Satz in die nämlichen Theile verwandelt werden. Ein Beyspiel hierüber. Es kosten 15 Ellen 76 fl. 30 kr., wie hoch kömmt ein halbes Viertel, oder was gleich viel ist, $\frac{1}{8}$ Ellen?

Operation.

Ellen	fl.	kr.	Elle?
15	76	30	$\frac{1}{8}$
8	60		
20 Achtelell.	4590 | 120 | 36	38 kr.	1 pf.
	99		
	12		
	96		
	3		
	4		
	xz | xz	1 pf.	

Pro-

Probe.

Elle	kr.	pf.	Ellen
$\frac{1}{5}$	38	1	15
	4		8
	153		120
	120		
	306		
	153		

2 3(3
4 8 3 6 0 | 4 5 9 0 | 76 fl. 30 kr.
4 4 4 | 6 6 0 |

Es ergiebt sich manchmal der Fall, daß der erste Satz eine größere Unterabtheilungssorte enthält, als der letzte Bruchsatz mit dem Einheitszähler. Hier muß nun wieder vor Allem Gleichheit der Unterabtheilungssorten hergeschaft, und nachher erst die letztgegebne Regel befolgt werden. Z. E. Wie hoch kömmt der fünfte Theil eines Metzens, wenn 18 Schäffel Korn um 314 fl. 20 kr. gekauft werden? Es mißt aber das Schäffel schweren Getreides 6 Metzen; nur das Schäffel Haber hat 7 Metzen.

Operation.

Schäffel	fl.	kr.	Metzen?
18	314	20	$\frac{1}{5}$
6	60		
108 Metzen	18860		
5			
540 Fünftelmetzen			

540

73

340

1 8 8 6 0 | 34 kr. 3 12/17 pf.
5 4 0
1 6 2
266
54
216
50
42
200 | 3 12/17 pf.
54
162
38

Probe.

Metzen	kr.	pf.	Schäffel?
1/5	34	3 12/17	18
	4		6
	139		108
	27		5
	992		540
	278		
	3772		
	540		
	15088		
	18860		
	2036880	332 75440 4444	2(2 188 60 66 60
	27		314 kr.
	189		20 kr.
	146		

146

146
27
135
118
27
108
108
27
108
0

Bis daher haben wir uns mit solchen Aufgaben der Regel Detri beschäftigt, wo entweder aus dem Betrag des Einfachen der Betrag des Mehrfachen gesucht wird; oder umgekehrt, wo man aus dem Betrag des Mehrfachen den Betrag des Einfachen bestimmt. Es ereignen sich aber manchmal Gelegenheiten, wo aus dem Betrag des Mehrfachen der Betrag eines andern Mehrfachen der nämlichen Art gefunden werden soll. Z. B. 5 Stück kosten 9 fl., was machen 12 Stück? Wenn ich nun weiß, wie hoch 1 Stück kömmt, so kann ich auch rechnen, was 12 Stück kosten. Man sieht also sogleich, daß man eigentlich vom Betrag des Mehrfachen auf den Betrag des Einfachen, und dann erst von diesem Einfachen auf das andere Vielfache schließen muß. Die Berechnung würde beyläufig so ausfallen.

I

Stück	fl.	Stück?
5	9	1

Antw. $\frac{9}{5}$ fl., oder 1 fl. 48 kr.

II

St.	fl.	St.?
1	2/3	12

9

3
x ø 8 1/1 = 21 fl.
5 5
6 o

3
x 8 ø 1/1 = 36 kr.
5 5

es kosten also 12 Stück 21 fl. 36 kr., wenn 5 Stück um 9 fl. gekauft werden.

Diese doppelte Verfahrungsart läßt sich nun nicht in eine einzige zusammziehen. Man setzt nämlich das Beyspiel nach den festgesetzten Regeln an, multipliciert den mittleren Satz durch den letzten, und dividiert das Produkt durch den ersten, wie hier:

Stück	fl.	Stück?
5	9	12

9

3
x ø 8 1/1 = 21 fl.
5 5
6 o

3
x 8 ø 1/1 = 36 kr.
5 5

Denn

Denn macht man zwo Anschreibungen daraus, so wird allemal bey der ersten Anschreibung jene Zahl die mit der Fragezahl gleiche Benennung hat, der erste Satz werden, und in der zwoten die Fragezahl den dritten Satz abgeben; die übrigen Sätze sind Einheiten, die nichts multiplicieren und dividieren, und die Wiederholung der Antwort aus der ersten Anschreibung. Eine solche Zerlegung hat nun bey Aufgaben dieser Art allemal statt; folglich müssen sie auch durchgehends nach der abgezognen Regel bearbeitet werden. 38400

Wenn die Unterabtheilungssorten des ersten und letzten Satzes nicht gleich sind, so muß es das erste Geschäft seyn, dieselben gleich zu machen. Ein Exempel hierüber! 8 Ballen Schreibpapier werden bezahlt mit 156 fl. 48 kr., was machen 3 Rieß, 7 Buch und 8 Bögen? Es hat aber der Ballen 10 Ries, der Ries 20 Buch, das Buch Schreibpapier 24, und Druckpapier 25 Bögen.

Operation.

Ballen	fl.	kr.	Ries	Buch	Bög.?
8	156	48	3	7	8
10	60		20		
80	9408		67		
20	1616		24		
1600	56448		276		
24	9408		134		
64	56448		1616		
32	9408				
38400	15203328				

38400

15203328 $\frac{1}{39}$ (3 $\frac{1}{6}$ 6 fl. 35 kr. 3 $\frac{17}{23}$ pf.
384 00 | 60 |
1152
3683
384
3456
2273
384
1920
35328
4 (4
141312 $\frac{1}{1}$ 3 $\frac{6528}{9600}$ (4 $\frac{1632}{2400}$ (2 $\frac{816}{1200}$
38400
115200
26112
(4 $\frac{204}{300}$ (3 $\frac{68}{100}$ (4 $\frac{17}{25}$

Führt der erste oder der letzte Satz einen Bruch mit sich, oder ist selbst ein Bruch, dessen Zähler größer als die Einheit ist, so muß bey beyden Sätzen die Reduktion zu gleichen Nennern vorgenommen werden. Z. E. $5\frac{1}{4}$ Ellen kosten 42 fl. 27 kr.; was machen 7 Ellen?

Operation.

Ellen	fl.	kr.	Ellen?
$5\frac{1}{4}$	42	27	7
21	60		4
	2547		28
	28		
	20376		
	5094		
	71316		

21 (3

7 13 16 $\frac{1}{1}$ 33 9 (6 $\frac{1}{1}$ 56 fl. 36 kr.
21 6 6 0
63
83
21
63
201
21
189
126
21
126
0

Zur Erläuterung dieser Operation braucht nicht mehr angemerkt zu werden, als daß man zuvörderst die gemischte Zahl $5\frac{1}{4}$ Ellen durch die Reduktion in lauter Viertel verwandelte. Mit dem Nenner 4 wurden dann auch sogleich die hintern 7 Ellen multipliciert, um ebenfalls Viertelellen zu erhalten.

Wenn sich beym mittleren Satz ein Bruch vorfindet, so ist es am besten, wenn der Nenner sogleich mit dem Divisor multipliciert wird, um dadurch zwo Divisionen in einer Operation zu verrichten; weil man doch allemal wieder nach der ersten Division den Quotus durch den Nenner des mittleren Bruches dividieren soll. Ein kleines Beyspiel soll dieß handgreiflich machen. 3 ℔ kosten $5\frac{1}{4}$ fl. was machen 8 ℔?

Ope-

Operation mit doppelten Divisionen.

℔	fl.	℔?
3	$5\frac{1}{4}$	8

21
8

x x x
x 6 8 1/1 5 6 1/1 14 fl.
3 3 4 4

Operation mit einer Division.

℔	fl.	℔?
3	$5\frac{1}{4}$	8
4		
12		

21
8

168 1/1 14 fl.
12

48
12
48
0

Vorzüglich gut ist diese Verfahrungsart, wenn die erste Division einen Bruch übrig läßt, wo dann in der zwoten Division der Bruch dividiert werden sollte, welches allemal beschwerlich ist. Z. B.

Stück	fl.	Stück?
4	$9\frac{1}{5}$	7

46
72 3
3 2 2 1/1 8 0 1/2 1/1 16 1/10 fl.
4 4 5 5 5

Bes=

Besser so:

Stück	fl.	Stück?
4	$9\frac{1}{5}$	7
5	46	
20	7	
	322	$16\frac{1}{10}$ fl.
	220	

Wenn sowohl der erste als letzte Satz einen Bruch bey sich hat, so muß vor allen Gleichheit der Nenner hergestellt werden, welches durch wechselseitiges Multiplicieren der Zähler in ihre Nenner geschieht. Hier ist ein Beyspiel!

Ellen	fl.	kr.	Ellen?
$1\frac{5}{6}$	11	20	$3\frac{3}{4}$
11	60		15
4	680		6
44	900	4	90
	61200	13 90	23 fl. $10\frac{10}{11}$ kr.
		660	
44			
172			
44			
132			
400			
44			
356			
46			

Nun

Nun kann es nicht mehr schwer seyn, wenn auch alle drey Sätze mit Brüchen versehen sind. Es darf die Regel wegen des mittlern Bruches nur wiederholet werden. Zum Beschluß noch ein einziges Exempel!

Ellen	fl.	kr.	Ellen?
$7\frac{1}{3}$	40	$17\frac{1}{4}$	$13\frac{2}{5}$
22	60		67
5	2417		3
110	4		201
4	9669		
40	201		
	9669		
	19338		
	1943469		
	44		
	176		
	183		
	44		
	176		
	74		
	44		
	306		
	44		
	264		
	429		

$\frac{1}{1}$ 44 1(6 $\frac{1}{1}$ 73 fl. 36 $\frac{420}{440}$ kr.
0 660

2(3

Probe.

Ellen	fl.	kr.	Ellen?
$13\frac{2}{5}$	73	$36\frac{4}{4}\frac{2}{8}$	$7\frac{1}{3}$
67	60		22
3	4416		5
201	440		110
440	177069		
804	17664		
804	1943469		
88440	110		
	1943469		
	1943469		
	213781590		
	8844 0		
	17688		
	36901		
	8844		
	35376		
	15255		
	8844		
	64119		
	8844		
	61908		
	2211		

$\frac{2211}{24}$ (17 $\frac{1}{4}$ 40 fl. 17 $\frac{1}{4}$ kr.
660

Die Gesetze, nach welchen die Regel Detri arbeitet, sind nun kurz folgende:

1) Sie setzt die Fragezahl zuletzt, jene Zahl, welche gleichartig mit der Fragezahl ist, zuerst, und den Betrag, der auf diese erste Zahl Bezug hat,

in

die Mitte. Man heißt dieß die 3 Sätze der
gel Detri.

2) Hat einer dieser Sätze Unterabtheilungen
) sich, so muß zuerst die Reduktion vorgenom-
n werden.

3) Sind etwa die zween äussern Sätze an Un-
abtheilungsbenennungen noch verschieden, so muß
rch Verwandlung der stärkern Unterabtheilung in
nämliche niedrige, völlige Gleichheit der Be-
nungen hergestellt werden.

4) Weil Brüche ebenfalls nichts anders als
terabtheilungen vorstellen, so hat man bey ihnen
nämliche Regel zu beobachten: das heißt, man
uciert, und, wenn von den äußern Sätzen die
de ist, multipliciert mit dem Nenner auch den
gegenstehenden Satz. Haben beyde äußere Sätze
rüche bey sich, so geschieht die Multiplikation
rch die Nenner wechselseitig. Hat der mittlere
atz einen Bruch bey sich, so wird mit dessen
enner allemal der erste Satz multipliciert.

5) Man multipliciert den mittleren Satz durch
n letzten und dividiert das Produkt durch den er-
n. Der Quotus enthält ganze Einheiten der
insten vorfindlichen Unterabtheilung des mittleren
atzes.

6) Die Probe besteht darinn, daß man das
rechnete Exempel umgekehrt ansetzt, nämlich den
zten Satz zum ersten, und den ersten zum letzten
acht, und die erhaltne Antwort als mittlern an-
reibt. Die Rechnung muß den vorigen mittlern
atz auswerfen.

Fragen.

Was ist die Regel Detri? Wie wird sie noch genennt, und warum? Welches Gesetz befolget die Regel Detri im Anschreiben der drey Zahlen? Wie wird bey der Berechnung verfahren, wenn der erste Satz eine Einheit ist? Wo ist der Grund dieses Verfahrens? Was ist zu merken, wenn der mittlere oder der letzte Satz Unterabtheilungssorten bey sich hat? Was, wenn statt der Unterabtheilungssorten, Brüche vorkommen? In welchen Fällen kann der letzte Satz eine Einheit seyn, und wie geht dann die Operation vor sich? Warum muß so und nicht anders operiert werden? Wie muß man in diesen Fällen Unterabtheilungssorten und Brüche behandeln? Was ist zu thun, wenn der mittlere Satz einen Bruch bey sich hat? Bey welchen Umständen ist diese Verfahrungsart vorzüglich gut, und warum? Was giebt es noch für eine Hauptklasse der Regeldetriaufgaben? Wie müßten diese Aufgaben eigentlich berechnet werden? Welche Regel läßt sich dafür abziehen? Wie werden bey dieser Art Aufgaben Brüche gemeistert? Wie heißen alle Gesetze der Regel Detri im Kurzen?

Exempel.

a) Zu Aschau, in der obern Pfalz, wird der Zentner Eisen für 9 fl. 24 kr. verkauft. Jemand läßt sich eine Lieferung von 26 Zentner verschreiben; was muß er bezahlen?

Operation.

Zt.	fl.	kr.	Zt.?
1	9	24	26

60

564

26

3384

1128

14664

22(2

14664 | 244 fl. 24 kr.

6660 |

b) Bey

b) Bey dem Bergamte Fichtelberg kostet hingegen der tner gemeines Eisen nur 7 fl. 45 kr., was werden dort Zentner betragen?

Operation.

Zt.	fl.	kr.	Zt.?
1	7	45	26

60
465
26
2790
930
(3
1 2 0 9 0 | 201 fl. 30 kr.
6660 |

c) Zu Bodenmais im bairischen Walde wird Vitriol ge- en, und der Zentner an die Ausländer für 4 fl. 45 kr. auft. Was beträgt dieß, wenn jährlich im Durchschnitt Zentner abgesetzt werden?

Operation.

Zt.	fl.	kr.	Zt.?
1	4	45	1800

60
285
1800
2280
285
3
5 x 3 0 0 0 | 8550 fl.
66660 |

8) Der

d) Der österreichische Eimer hält 52 baierische Maaß. Ein hiesiger Weinwirth erhält eine Lieferung von 33 solchen Eimern; wie viel wird er bairische Maaß haben?

Operation.

Eimer	Maaß	Eimer?
1	52	33

52
33

156
156

Antw. 1716 Maaß.

e) Die Mark Gold wird in hiesiger Münze mit 270 fl. bezahlt; wie hoch kömmt der Gran? Es hat aber 1 Mark oder $\frac{1}{2}$ kölnisches Pfund 24 Karat, und das Karat 4 Gran, der Gran 3 Gren.

Operation.

Mark	fl.	Gran?
1	270	1
24		
4		
96		

270 | 1 = 2 fl.
96 |
192

78
60

4680 | 1 = 48 kr.
96 |
384

840
96
768

72
4
---
288 | 1 = 3 pf.
96 |
288

e) Wie

f) Wie hoch kömmt zu Traunstein das Pfund Salz, wenn
r Zentner um 2 fl. 36 kr. verkauft wird?

Operation.

Pfund	fl.	kr.	Pfund?
100	2	36	1

60

x56 | 1 kr.
x00 |

4 4

224 | 2 6/25 pf.
x00 |

g) Jemand ließ von München nach Frankfurt am Rhein
6 Zentner Waar führen, und mußte für die Fracht 264 fl.
o kr. zahlen; was begehrte man vom Zentner?

Operation.

Zentner	fl.	kr.	Zentner?
46	264	30	1

60

1587o | 5(45 | 5 fl. 45 kr.
46 60 |
138
207
46
184
230
46
230
0

h) 5 fl.

h) 5 fl. Oesterreichergeld machen 6 fl. baierisches Geld. Jemand nahm in Wien 386 fl. 40 kr. ein, und geht nach Baiern; wie groß ist seine Summe in Baiern?

Operation.

Oesterr. Geld.	Baier. Geld.	Oesterr. Geld.?
5 fl.	6 fl.	386 fl. 40 kr.
60		60
300		23200
		6
		xx
		x39200 | 464 fl.
		33300 |

i) Ein anderer nimmt aus Baiern 270 fl. mit und reiset nach Oesterreich; wie viel hat er dort Geld?

Operation.

Baier. Guld.	Oesterr. Guld.	Baier. Guld.?
6	5	270
		5
		xx
		x350 | 225 fl.
		666 |

k) Zur Donaumooskultur zwischen Neuburg und Ingolstadt sind bereits 530000 fl. verwendet worden. Man hat aber dafür 60000 Joucharte oder Tagwerke, jedes zu 40000 Quadratschuh angelegt; wie viel Unkösten trift auf ein Jouchart?

Operation.

Jouchart	fl.	Jouchart
60000	530000	1

5 3 0 0 0 0 | 8 fl.
6 0 0 0 0 |
4 8
5
6 0
3 0 0 | 5 0 kr.
6 |

l) Die Kommission dieser Mooskultur hat im Ganzen
$327\frac{3}{8}$ Tagwerke für 21044 fl. von den dortigen Unterthanen
n sich gekauft; was gab sie im Durchschnitt für 1 Jouchart?

Operation.

Tagwerk	fl.	Tagwerk?
2327 3/8	21044	1
18619	8	
	168352 | 9 fl.	
	18619 |	
	167571	
	781	
	60	
	46860 | 2 kr.	
	18619 |	
	37238	
	9622	
	4	
	38488 | 2 1250/18619 fl.	
	18619 |	
	37238	
	1250	

m) 100 Münchnerpfund machen in der Oberpfalz 93 3/8
fund; was betragen 2640 pfälzische Pfunde in München?

Operation.

Pfälz. Pfund	Münchn. Pfund	Pfälz. Pfund?
93 3/8	100	2640
747		8
		21120
		100
		2112000
		21

3

2 1 1 2 0 0 0 | 2 8 2 7 $\frac{77}{249}$ Münchnerpfunde.

7 4 7

1 4 9 4

6 1 8 0

7 4 7

5 9 7 6

2 0 4 0

7 4 7

1 4 9 4

5 4 6 0

7 4 7

5 2 2 9

2 3 1

n) 112 $\frac{1}{2}$ Augsburgerellen betragen 80 $\frac{1}{3}$ Münchnerellen. Ein Landkrammer handelt in Augsburg 64 Ellen Bänder ein, und verkauft sie nach der baierischen Elle; wie viel wird er herausmessen?

Operation.

Augsb. Ellen	Münchnerellen	Augsb. Ellen?
112 $\frac{1}{2}$	80 $\frac{1}{3}$	64
225	241	2
3	128	128
675	1928	
	482	
	241	
	30848 | 675	45 $\frac{473}{675}$ Münchnerellen.
	2700	
	3848	
	675	
	3375	
	473	

n) 12

e) 12938 rheinländische Schuhe machen 13913 baierische Schuhe. Wie groß ist nun ein Mann nach baierischem Maaße, wenn er nach rheinischem Maaße $6\frac{3}{4}$ Schuh mißt.

Operation.

Rhein. Schuh	Baier. Schuh	Rhein. Schuh?
12938	13913	$6\frac{3}{4}$
4	27	27
51752	97391	
	27826	
	375651 | 7 Schuh.	
	51752 |	
	362264	
	13387	
	12	
	26774 4	
	13887 ⌣	
	160644 | $3\frac{13347}{12938}$ Zoll.	
	51752 |	
	155256	
	5388	

§. 9.

Von der reesischen Regel.

Wir hätten von der Regelquinque, Regelseptem u. d. gl. welche mit fünf und mehrern Sätzen rechnen, so manches noch zu sagen. Auch von der umgekehrten Regel Detri thaten wir noch keine Erwähnung. Aber dieß geschah deßwegen, weil sich die dahin einschlägigen Aufgaben eben so leicht, wo nicht leichter, nach der allgemein eingeführten reesischen Regel bearbeiten lassen; und weil ich auch deßwegen gesinnt bin, mich darüber etwas weitläuftiger auszubreiten.

Die

Die reesische Regel hat ihren Namen von dem Urheber derselben, dem Hrn. von Rees einem Holländer, der die bey Kaufleuten übliche Kettenpraktik mit einigen Veränderungen auch auf bürgerliche Rechnungsfälle anzuwenden wußte. Ihr Ansatz ist von dem der Regel Detri ganz verschieden; aber dabey so natürlich, daß auch ein sonst schwacher Kopf ihn sehr bald fassen muß, und bey keiner Aufgabe dieser Art so leicht verfehlen kann. Man macht allererst einen Senkstrich und fängt auf der linken Seite mit Hinschreibung der Benennung dessen an, wonach man frägt; setzt die Fragezahl selbst rechts daneben, dann links etwas unterhalb die Zahl, welche gleiche Benennung mit der Fragezahl hat, und wieder rechts daneben den Betrag. Hat dieser Betrag die nämliche Benennung, womit links angefangen worden, so ist der Ansatz fertig; wo nicht, so wird die letzte Benennung links wiederholt, und durch Unterabtheilungssorten so ergänzt, daß die nämliche Benennung rechts aufhört, wie sie links allererst angefangen. Ein Beyspiel soll all dieß Gesagte noch mehr erläutern. 3 ℔ kosten 44 kr., was machen 20 ℔?

fl. ?	20 ℔
℔ 3	44 kr.
kr. 60	1 fl.

Die Sprechform heißt daher so: Wie viel Gulden kosten 20 ℔, da 3 ℔ 44 kr. machen und 60 kr. 1 fl. ist. So hören Gulden auf, wie sie angefangen.

Hätte

Hätte man diesen Ansatz in der Regel Detri emacht, würde er so stehen:

℔	kr.	℔
3	44	20

Weil man nun hier weiß, daß 44 durch 20 mul- pliciert werden muß, und daß man das Produkt llererst durch 3 und dann die Kreutzer durch 60 i dividieren habe, so sieht man beym ersten Anblick es reesischen Ansatzes, daß die Zahlen zur Rechten ultiplicieren und die zur Linken dividieren.

Ein wichtiger Vortheil, den man zwar auch ey der Regel Detri anwenden könnte, ist bey der esischen Regel in den meisten Fällen die Verklei- erung. Man versteht darunter jene Verrichtung, odurch zwo Zahlen, deren die eine links, die an- ere rechts steht, durch eine willkührlich angenom- ene dritte Zahl ohne Rest dividiert werden. So B. sieht man im obigen Ansatze, daß sich die ahlen 20 und 60 erst durch 10, oder durch Weg- hneidung der Nullen, dann durch 2 dividieren assen. Nach der Verkleinerung gewinnt das Exem- el folgende Gestalt:

fl. ?	2 ø ℔
3	4 4 kr.
6 ø	1 fl.
3	

Wenn man beym Verkleinern die Einheit zum Quo- us erhält, so wird selbe nicht angeschrieben; weil Eins weder multipliciert noch dividiert.

Aber

Aber wo liegt wohl der Grund, daß man bey der reesischen Regel verkleinern darf, das heißt: daß man auch nach der Verkleinerung noch, so wie vorher, die nämliche Antwort erhält? Lediglich darinn, weil der ganze reesische Ansatz einen Bruch vorstellt, wo die linke Seite der Nenner und die rechte der Zähler ist, ungefähr so: $\frac{20 \times 44}{3 \times 60} = \frac{880}{180}$. Es ist aber oben bey der Lehre von Brüchen dargethan worden, daß der Werth des Bruches ungeändert bleibt, wenn Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl dividiert wird; daher

$$\frac{20 \times 44}{3 \times 60} \Big| = \frac{2 \times 44}{3 \times 6} \Big| = \frac{44}{3 \times 3}$$

(10 über 20 und 60; 2 über 2 und 6)

oder $\frac{880}{180} = \frac{88}{18} \Big| = \frac{44}{9}$.

(2 über 880 und 180)

Die Berechnung selbst ist am Ende der Verkleinerung bald geschehen. Es werden nur die übergebliebnen Zahlen beyderseits multipliciert, und das Produkt rechterseits durch das linke dividiert.

fl. ? | 2 ø ℔
3 | 4 4 kr.
6 ø | 1 fl.
3 | 8
9 | 44 | 1/1 4 fl.
9
60
3 (3 (3 über 3)
48 ø | 1/1 5 3 1/3 kr.
9 9

Was

Was bey der Regel Detri wegen der Reduk-
on erinnert worden, gilt hier ebenfalls. Man
uß nämlich, wenn mehrere Unterabtheilungsſorten
ben einander ſtehen, ſie alle in die kleinſte ver-
andeln. Gut wird es ſeyn, wenn man immer
it der kleinſten Unterabtheilungsſorte auf der an-
rn Seite anbindet; denn ſonſt entſteht in der
ette eine Lücke, die zu Ende des Anſatzes unver-
eidlich ergänzt werden müßte. Z. B. Was koſtet
Zt. 36 ℔ 4 Lt., wenn 8 ℔ mit 1 fl. 30 kr.
zahlt werden?

| | | |

```
6 7
  6 0 4
-------
4 0 2 0 | 3 1 1/3 2/3 kr.
1 2 8   |
3 8 4   |
-------
  1 8 0
  1 2 8
-------
    5 2
```

Hier wurde allererst durch eine Nebenrechnung bestimmt, wie viele Lothe der erste Satz 1 Zt. 36 ℔ und 4 Loth giebt, die gefundne Zahl 4356 unterhalb angesetzt, und weil der erste Satz 1 Zt. 36 ℔ 4 Loth nichts mehr gelten kann, eben darum ausgestrichen. Ferner weiß man auch, daß 1 fl. 30 kr. in lauter Kreutzern 90 ausmacht; deßwegen wird auch 90 heruntergesetzt, und 1 fl. 30 kr. ausgestrichen. Nun geht es über die Verkleinerung los, welche durch die danebenstehende Divisores angezeigt ist, und dann endlich über die wirkliche Berechnung.

*) Die Verkleinerungszahlen 10, 100, 1000 u. s f. werde ich in Zukunft nicht mehr aussetzen, sondern nur beyderseits gleich viele Nullen abschneiden; weil dieß, im Grunde genommen, das nämliche Verfahren ist.

Kommen Brüche oder gemischte Zahlen vor, so müssen diese letztere allemal auf uneigentliche Brüche reduciert, dann in beyden Fällen die Nenner ausgestrichen, und dieselben auf die Gegenseite hingeschrieben werden. Den Grund dieses Verfahrens haben wir schon bey der Regel Detri angegeben, wo ebenfalls nach der Reduktion die Nenner des zweyten und dritten Satzes, welche Sätze bey der reesischen Regel die rechte Seite geben, mit dem ersten Satze, als der linken Seite, und wechsels

weise der Nenner des ersten Satzes mit dem letz-
Satze multipliciert worden. Wir wollen ein
eyspiel nach beyden Arten berechnen, um zu zei-
, daß die Verfahrungsart die nämliche sey.
an bezahlt, setzen wir, $3\frac{1}{2}$ Ellen um $11\frac{1}{5}$ fl.;
s machen $\frac{5}{6}$ Ellen?

Reesische Regel.

fl. ?	$\frac{5}{6}$ Ellen
Ellen $3\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{5}$ fl.

6 | 7 | 5 | 3

$\frac{5}{6}$ | $11\frac{1}{5}$ | 2 | 3

(2 $\frac{1}{1}$ $2\frac{2}{3}$ fl. oder 2 fl. 40 kr.

Regel Detri.

Ellen	fl.	Ellen?
$3\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{5}$	$\frac{5}{6}$
7	56	5
6	10	2
42	560 $\frac{1}{1}$ 2 fl.	10
5	210	
210	42	
	14	
	60	
	840 $\frac{1}{1}$ 40 kr.	
	24	
	84	

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Weil wir nun auch die reesische Regel mit Brüchen zu behandeln im Stande sind, und bey den meisten Operationen am Ende Brüche zum Vorschein zu kommen pflegen, so können wir itzt auch über jedes gerechnete Beyspiel die Probe machen. Es darf nur, wie bey der Regel Detri, das Exempel umgekehrt werden, und das Uebrige muß sich ganz natürlich von selbst ergeben. Vorher hieß unser letztes Beyspiel: $3\frac{1}{2}$ Ellen kosten $11\frac{1}{5}$ fl.; was machen $\frac{5}{6}$ Ellen? Die Antwort war: $2\frac{2}{3}$ fl. Nun geht die Sprechform so: Wie viel Gulden kosten $3\frac{1}{2}$ Ellen, da $\frac{5}{6}$ Ellen $2\frac{2}{3}$ fl. kosten? Am Ende müssen die obigen $11\frac{1}{5}$ fl. wieder herauskommen.

fl.?	$3\frac{1}{2}$ Ellen
$\frac{5}{6}$	$2\frac{2}{3}$ fl.
2	7
3	8
	6
	2
	1
56 / 55	$11\frac{1}{5}$ fl.

Auf diese Weise werden nun alle Proben gemacht, und man sieht dabey, daß die Sache gar nichts beschwerliches an sich habe.

Noch muß ich bey Bruchexempeln anmerken, daß, im Fall zween Brüche auf entgegengesetzten Seiten gleiche Nenner haben, die Versetzung der Nenner eben nicht nöthig sey; weil sie ohnehin

wieder

eder durch die Verkleinerung wegfallen. Denn hne man folgendes Exempel durch die reesische gel, und man wird sehen, daß, wenn auch die nner wirklich auf die entgegengesetzten Seiten rtragen werden, selbe doch sogleich durch die rkleinerung verschwinden. Was kosten 15 Ellen, nn $2\frac{1}{4}$ Ellen für $8\frac{3}{4}$ fl. bezahlt werden?

fl. ?	x 15 Ellen
Ellen $2\frac{x}{4}$	$8\frac{3}{4}$ fl.
9	35
4	4
3	5
	21
	x = 15 / 3 = 58 $\frac{1}{3}$ fl.

Noch zuletzt ein Beyspiel, wo man für Geld Waaren fragt. Es macht zwar dieser Fall kei- Ausnahme, giebt aber doch dem Ansatz eine ere Richtung. Z. E. Wie viel kann man für 40 fl. Schaafe kaufen, wenn immer 3 und 3 tück 20 fl. gelten?

Schaafe?	x 440 fl.
fl. 20	3 Schaafe
	72
	216 Schaafe.

Ein anders Beyspiel! Um 4 kr. kauft man 9 Eyer; wie viel bekömmt man für 2 fl. 24 kr.?

Eyer?	2 fl. 24 kr.
kr. 4	9 Eyer
:4	x 4 4
	3 6
	9
	3 2 4 Eyer.

Manchmal ereignet sichs, daß nach der Verkleinerung auf keiner Seite mehr etwas übrig gelassen wird. In solchen Fällen muß allemal die Einheit als Antwort betrachtet werden; weil vor der letzten Verkleinerung eigentlich die Division hätte sollen verrichtet werden. Wird die rechte Seite leer, und befindet sich auf der linken Seite noch eine Zahl, so ist die Antwort ein Bruch, der zum Zähler die Einheit hat; weil man zur Rechten bey der letzten Verkleinerung den Quotus 1 nicht anzuschreiben pfleget. Ueberall Versinnlichung durch folgende zwo Aufgaben: I Wenn 200 Schnecken für 10 kr. gekauft werden; wie hoch kömmt das Stück? II Wie hoch kömmt das Loth, wenn 7 ℔ für 3 fl. 44 kr. bezahlt werden?

I

pf.?	1 Schnecke
200	10 kr.
1	4 pf.
:4 5	
Antw. $\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$ pf.

II

II

kr. ?	1 Loth
32	1 ℔
7	3 fl. 44 kr.

8 4 | 224
4 | 28
7 | 7

Antw. 1 kr.

Solche Rechnungen nun, die den einfachen Kauf und Verkauf betreffen, haben keine weitern Schwierigkeiten. Sie lassen sich leicht, und ohne vieles Nachdenken in einen Ansatz bringen. Etwas anders verhält sich die Sache in den meisten übrigen Rechnungsfällen des bürgerlichen Lebens. Sie haben größtentheils 5 oder mehr Sätze, mögen sie offenbar da stehen, oder aber versteckt seyn. Setzen wir das leichte Exempel. **Wie lange werden 10 Maurer zu einer Mauer brauchen; wenn 5 Maurer in 18 Tägen fertig werden?** Man mag nun dieß Exempel nach der ordentlichen Regel Detri, oder nach der bisher gegebnen reesischen Regel rechnen, so wird allemal eine verkehrte Antwort herauskommen. Es scheint beym reesischen Ansatze nichts natürlicher als diese Sprechform zu seyn: **Wie viele Täge brauchen 10 Maurer; wenn 5 Maurer 18 Tage brauchen?**

Tage ?	10 Maurer
5	18 Täge
5	2
	36 Täg.

Und

Und doch ist nichts ungereimter als diese Antwort; da statt 36 Tag nur 9 Täge als halbe Zeit hätten zum Vorschein kommen sollen.

Man muß in solchen Fällen immer auf Ursach und Wirkung Rücksicht nehmen, und jene Sätze, die zur Ursache zusamm gehören, oder mit andern Worten, die die Wirkung miteinander bestimmen helfen, nie von einander absöndern. Es ist auffallend natürlich, daß in unserm Exempel unter der Mauer die Wirkung zu verstehen sey, und daß die Geschwindigkeit oder Größe dieser Wirkung von der Anzahl der Arbeiter, und von der Anzahl der Tage zugleich abhänge. Denn je mehr Arbeiter in der nämlichen Zeit sind, desto größer die Wirkung: je mehr Täge bey den nämlichen Arbeitern, desto größer wieder die Wirkung. Man kann sich demnach ein für allemal merken, daß in allen solchen Rechnungen Arbeiter und Zeit als miteinander wirkende Ursachen unzertrennlich beysammen bleiben müssen. Es ist auch gut, wenn man die Wirkung durch ein Ziffer sichtbar macht. Das obige Beyspiel wird nun eigentlich so angesetzt und berechnet:

	Tage?	
	Maurer 10	1 Mauer
	Mauer 1	5 Tag
:5	2	18 Maurer
2:		9 Tag

Noch ein solches Beyspiel:

Es werden 8 Schnitter mit einen Acker Weitzen in $2\frac{1}{2}$ Tag fertig; wie viel muß man Schnitter haben daß der Acker in einen Tag geschnitten wird?

Ope-

Operation.

Schnitter?	1 Acker
Tag 1	
	8 Schnitter
Acker 1	2½ Tag

2 | 5
4
20

Antw. 20 Schnitter.

Die Wirkungen können manchmal verschieden
yn. Z. B. Eine Mannschaft von 840 Mann
rzehret in 16 Tagen 124 Zentner Fleisch; wie
nge werden 560 Mann mit 72 Zentner aus-
mmen?

Operation.

Tage?	72 Zt.
Mann 560	
	16 Tagen
Zt. 124	840 Mann

7	9
31	4
217	336
9	
3024	

3 0 2 4 $\frac{1}{1}$ 1 3 oder beynahe
2 1 7 14 Tage.

8 5 4
2 1 7
6 5 1
2 0 3

Bey Zinsrechnungen gehören Kapital und Zeit als Ursachen zusammen, und die Zinsen sind die dadurch hervorgebrachten Wirkungen; denn man kann sagen: Je größer bey der nämlichen Zeit das Kapital ist; je größer werden auch die Zinsen seyn: Ferner, je größer beym nämlichen Kapital die Zeit ist, desto mehr werden auch die Zinsen anwachsen. Z. E. Wie lange muß ein Kapital von 6000 fl. zu 4 procent liegen bleiben, um damit 1200 fl. Interessen zu erobern? Der Ausdruck procent muß allemal beym Ansatz in seine eigentlichen Begriffe zerlegt werden. Es heißt aber 4 procent nichts anders, als daß 100 fl. Kapital in 1 Jahr Zeit 4 fl. Interessen tragen, wo demnach 100 fl. und 1 Jahr unvermeidlich als Ursach von der Wirkung 4 fl. Interessen zusamm gehört.

Operation.

:2	Jahre?	1200 fl.
	fl. 6000	
:4	fl. 4	100 fl. }
		1 Jahr }
:3	3	3
		5 Jahre.

Zur

Zur Probe wollen wir untersuchen, ob 6000 fl. wirklich in 5 Jahren 1200 fl. Interessen abwerfen.

fl. ?	6000 fl. } 5 Jahren }
{ fl. 100 Jahr 1	4 fl.
	240
	5
	1200 fl., was zu erproben.

Oder:

[Kap. fl. ? Jahr 5	1200 fl. Zins
5	100 fl. Kap.]
Zins fl. 4	1 Jahr
4	300
	60
	100
Antw.	6000 fl.

Bey Rechnungen des Brodsatzes für Bäcker wird der Getreidpreis und das Gewicht des Brodes zusamm den Werth desselben bestimmen: denn, je höher beym nämlichen Brodgewicht der Getreidpreis ist, desto mehr muß auch das Brod gelten: Ferner, je mehr beym nämlichen Getreidpreis das Brod wiegt, desto größer ist auch der Werth dieses Brodes. Z. E. Wenn das Schäffl Weitzen 9 fl. gilt, muß eine Kreutzersemmel 9 Loth 1 Quintl wägen; was muß es wägen, wenn das Schäffl Weitzen 22 fl. 40 kr. gilt?

Ope-

Operation.

{ Loth?
{ fl. 22 kr. 40

kr. 1

12 Quintl 4
fl. 1
1360
2
2722

1 kr.

9 Lt. 1 Qu.
9 fl.

1 Loth
60 kr.
} Ergänzungen.

37
3
111
9
999 1/1 3 Loth
272
816
183
4 4/1
732 1/1 2 47/68 Quintl.
272
544
188

Bey andern Rechnungsfällen dieser Art kostet es nur allemal eine richtige Beurtheilung, um zu wissen, was Ursache, was Wirkung sey. Wir wollen etliche solche Beyspiele bearbeiten.

I

Ein Fuhrmann führt um eine gewisse Bezahlung 30 Zentner Waare 16 Meilen weit; wie viele Zentner wird er um die nämliche Bezahlung 48 Meilen weit führen?

Es wird hier einleuchtend seyn, daß die Weite des Weges und die Größe der Last miteinander die Bezahlung bestimmen. Weil nun hier die Bezahlung als Wirkung gleich ist, so kann was immer dafür gesetzt werden, und sie wird doch allemal durch Verkleinerung aus dem Ansatze wegfallen. Am natürlichsten wird es seyn, wir setzen, weil es eine und die nämliche Bezahlung ist, 1 dafür an.

Operation.

Zt. ?		1 Bezahlung	
Meilen	48		
Bezahlung	1	3 ∅ Zt.	}
	16	16 Meilen	}
	3	10 Zentner.	

II

Zu einem Luftballon, brauchte man 13 Ellen Taffet, welcher $\frac{3}{4}$ Ellen breit war. Es soll nun ein gleich großer von einem andern Taffet, der nur $\frac{2}{3}$ Ellen breit ist, gemacht werden, wie viel braucht man da Ellen in der Länge?

Da

Da die Größe des Ballons sowohl von der Länge als Breite des Taffets abhängt, so müssen Länge und Breite als bestimmende Ursachen beysamm bleiben.

Operation.

{ Ellen Länge? / Ellen Breite $\frac{2}{3}$	1 Ballon
	1 3 Ellen Länge / $\frac{3}{4}$ Ellen Breite
Ballon 1	
4	3
8	39
	3
	3 5 $\frac{1}{1}$ 1 4 $\frac{5}{8}$ Ellen.
	1 1 7
	8 8

III

Ein vermöglicher Mann leihet einem andern 500 fl., ohne einen Zins zu fordern, welcher auch nach 3 Monaten richtig bezahlte. Nach einiger Zeit befand sich der leztere wieder in guten Umständen. Jener hatte ein Unglück, und bekam gleichfalls von diesem 150 fl. ohne Zins zu leihen; wie lang darf er diese Summe behalten, damit der zweyte Liebesdienst eben so groß werde als der erste?

Je mehr man Geld ohne Zins auslehnt, und länger man dasselbe in fremden Händen läßt, esto größer ist ohne Zweifel der Liebesdienst; daher hören Geld und Zeit zusamm, und der gleichseynllende Liebesdienst kann beyderseits durch 1 ausdrückt werden.

Operation.

{ Monat?		1 Liebesdienst
{ 150 fl.		
Liebesdienst 1		3 Monat }
5		500 fl. }
		10 Monat.

Aus diesen wenigen Beyspielen läßt sich so emlich auf andere schließen, welche hier unmöglich le angeführt werden können. Jene Fälle muß ich rz noch durch ein Exempel rügen, wo auch die Wirkung aus mehrern Größen zusammgesetzt ist. Diese Größen sind daher eben so unzertrennlich von er Wirkung, als die Bestimmungen der Ursache. Ein Kanal, der 120 Schuh lang, 30 Schuh reit und 8 tief ist, wird von 200 Personen 18 Wochen fertig gemacht: wie viel braucht an Personen zu einem andern Kanal, der 300 Schuh lang, 40 breit und 10 Schuh tief ist, enn er in 24 Wochen fertig werden soll?

Hier gehören zur Wirkung, die unfehlbar der Kanal ist, auch Länge, Breite, und Tiefe; daher können sie eben so wenig davon getrennt werden,

als

als sich Personen und Zeit von der Ursache trennen lassen.

Operation.

		Personen?	1 Kanal
		Wochen 24	300 Schuh lang
			40 : : breit
			x0 : : tief
	Kanal 1		
	lang x20		200 Personen
:3	breit 30		x8 Wochen
:8	tief 8		
:6			
:3	4		5
:4	4		3
:2	4		50
:2	2		25
			5
			125
			5
			625 Personen.

Indeß giebt es doch in bürgerlichen Rechnungen Fälle, die beym ersten Anblicke bloß die reesische Regel oder Regel Detri zu fordern scheinen; im Grunde aber geometrische oder physikalische Kenntnisse voraussetzen. Z. E. Eine eiserne Kugel, welche 6 Zoll hoch ist, wiegt 33 ℔; wie viel

wird

ird eine andere wiegen, welche 9 Zoll hoch
? Die reesische Regel würde so ausfallen.

℔ ?	1 Kugl
Kugl 1	9 Zoll
Zoll 6	3 3 ℔
2	3
1 1	
9 9	4 9½ ℔; da sie doch
2 2	eigentlich 111 ℔ wiegt.

Oder: ein Uhrpendel, wenn es 2 Schuh
ng ist, macht in 100 Sekunden 125 Schwin-
ngen; wie viele Schwingungen würde es ma-
en, wenn dieses Uhrpendel 3 Schuh lang wäre?

Wir wollen uns nicht länger aufhalten zu zei-
n, wie diese und dergleichen Fälle eigentlich be-
chnet werden sollen, um so weniger, da unsere
enntnisse noch nicht dazu auslangen: sondern lie-
r alle bisher gegebnen Gesetze der reesischen Regel
einen kurzen Ueberblick zusamm fassen.

1) Die äußere Form der reesischen Regel ist
n Senkstrich, und links und rechts untereinander
hende Zahlen.

2) Man fängt links mit der Frage an, schreibt
tt der unbekannten Zahl ein x oder ein Frage-
chen hin, oder läßt die Stelle gar leer; dann
ird rechts daneben jene Zahl gesetzt, die auf diese
rage Bezug hat; endlich links wieder eine Zahl
n gleicher Benennung mit dieser letztern, und
lange fortgefahren, bis rechts eine Zahl erscheint,

die

die die nämliche Benennung mit sich führt, wie anfangs zur Linken hingesetzt worden.

3) Von Brüchen werden die Nenner ausgestrichen und auf die Gegenseite hingesetzt.

4) Gemischte Zahlen werden erst zu uneigentlichen Brüchen reduciert, und dann mit den Nennern wie oben verfahren.

5) Jene Sätze, wo Unterabtheilungssorten vorkommen, werden in die kleinste derselben durch Multiplikation und Einzählung verwandelt, und wofern sich der Name derselben nicht auf der entgegengesetzten Seite befinden sollte, muß die Kette der Sätze ergänzt werden.

6) Wenn beyderseits Nullen vorhanden sind, so werden überall gleich viele ausgestrichen.

7) Wenn zu beyden Seiten mit gleichen Zahlen verkleinert werden kann, so soll man es thun, um die Rechnung theils zu erleichtern, theils abzukürzen.

8) Zuletzt werden die übrigen Zahlen zur Rechten zusamm multipliciert, desgleichen auch zur linken. Am Ende wird das Produkt zur Rechten durch das zur Linken dividiert.

9) Ist gähling nirgends eine Zahl übrig geblieben, so ist die Einheit die Antwort.

10) Ist zwar zur Rechten keine Zahl mehr übrig geblieben, wohl aber zur Linken, so ist die Antwort ein Bruch, der zum Zähler 1 hat.

11) Bey andern bürgerlichen Rechnungen, die nicht mehr von Kauf und Verkauf handeln, muß

)t gegeben werden, was zur Ursache, was zur irkung gehört, damit man die zusammgehörigen lieder nicht trenne.

Fragen.

Woher hat die reesische Regel ihre Benennung? Was steht man eigentlich unter der resischen Regel? Wie ist Ansatz bey der reesischen Regel beschaffen? Ein Beyspiel rüber! Welche Zahlen multipliciren, welche dividieren? s braucht man für einen wichtigen Vortheil bey der reesi- n Regel? Was versteht man unter der Verkleinerung? liegt der Grund dieser Verkleinerung? Was geschieht nach Verkleinerung? Was ist in Rücksicht der Unterabthei- gsforten zu bemerken? Wie müssen Brüche, wie gemischte hlen behandelt werden? Hat diese Behandlung auch Grund? t es der Umsetzung der Nenner auch dann nöthig, wenn beyden Seiten gleichnennerichte Brüche vorhanden sind, warum nicht? Machen Fälle, wo man für Geld um aren fragt, eine Ausnahm von der ordentlichen Regel? s ist zuletzt die Antwort, wenn durch die Verkleinerung derseits alles aufgeht? Was, wenn zwar rechts alles auf- t, aber links noch eine Zahl übrig bleibt? Auf was muß andern Rechnungsfällen, die nicht mehr den einfachen Kauf Verkauf angehen, Rücksicht genommen werden? Setzen mir ein Exempel, wo Ursache und Wirkung ersichtlich sind! s käme da heraus, wenn der Ansatz nach der gewöhnli- n Weise gemacht würde? Was gehören bey Zinsrechnun- als miteinander wirkende Ursachen zusamm, und warum? s bey Rechnungen des Brodsatzes für Bäcker, und warum? nn auch die Wirkung aus mehrern Größen zusammgesetzt n? Zeigen Sie mir dieß in einem Beyspiele! Giebt es auch gerliche Rechnungsfälle, die sich weder durch die reesische gel, noch durch die Regel Detri meistern lassen, und was die Ursache davon?

Exempel.

a) Jemand braucht in 5 Tägen 4 Loth Schnupftobak; was macht dieß in Zeit von 48 Jahren? Ferner, was beträgt dieß in Geld, das Loth zu $2\frac{1}{2}$ kr.?

Operation.

I

	Zt.?	48 Jahren
	1	365 Tag
:5	5	4 Loth
:8	32	1 ℔
	100	1 Zt.
:4	4	73
		6
	438	4 Zt. 38 ℔.
	100	

II

	fl.?	438 ℔
	1	32 Loth
:2	1	$2\frac{1}{2}$ kr.
		2
:5	60	1
	2	5
:4	12	2 fl 9
	3	73
		8
		584 fl.

b) Ein

b) Ein Physiolog fand durch Untersuchung, daß sein Bart, er sich die Woche zweymal scheeren ließ, allemal den 24igs Theil eines Zolles lang wachse; wie viele Schuhe wur ihm von 20 Jahren an bis in sein 92igstes Jahr (denn lt wurde er) weggeschoren?

Operation.

Schuhe?	7 Z Jahren
1	5 Z Woche
1	Z Male
1	1 / — Zoll
	24
12	1 Schuh
24	6
4	26 Schuhe
Z	

c) Ein spekulierender Kapitalist möchte gerne in 11 Jah 4620 fl. an Zinsen erobern, und kann sein Geld nicht er als zu $3\frac{1}{2}$ procent anlegen, wie groß muß das Ka seyn?

Operation.

Kapital fl.?	46Z0 fl. Zinsen
Jahr 11	100 fl. Kapital
Zins fl. 3 1/—	1 Jahr
Z	2
7	660
	60
	2
	120
	100
	12000 fl.

d) Juwelen und Perlen werden in ganz Europa nach holländischem Troygewicht gewogen. Es hält eine Unze 150 Karat, und 1 Karat 4 Gran. Der größte Diamant, den Portugal aus Brasiliens Bergwerken erbeutete, wiegt $11\frac{1}{5}$ Unzen oder 1680 Karat. Was würde er nach münchnerischem Gewicht wägen, da 1 Unze 32 holländische Asen hält, und 1 Münchnerpfund 11071 solcher Asen wiegt?

Operation.

Quintl?	$XX\frac{1}{5}$ Unze
1	32 Asen
11671	1 Münchnerpfund
1	32 Loth
1	4 Quintl
5	56
58355	224
	32
	448
	672
	7168
	32
	14336
	21504
	229376 | 3 $\frac{5431\,1}{58355}$ Quintl, d. i.
	58355 nicht gar ein Loth.
	175065
	54311

e) Wenn

e) Wenn ein Kapital von 5140 fl. in $9\frac{3}{4}$ Jahren 2255 fl. kr. 2 pf. Zins getragen; zu wie viel procent ist es angelt worden?

Operation.

fl. ? | 100 fl. / 1 Jahr

5140 | 2255 fl. 10 kr. 2 pf.
$9\frac{3}{4}$
pf. 4 | 1 kr.
60 | 1 fl.

39 | 5412422 3341
13 | 1804144 | 1
514 | 30069 | 1 | $4\frac{1}{2}$ fl.
13 | 6682
1542 | 26728
514 | 3341
6682

f) Ein Pfund Apotheckergewicht hält in ganz Deutschland 7452 holländische Asen. Jemand liefert 48 Pfund Wein in nach Münchnergewicht in irgend eine Apothecke, was rd er dort wägen, wenn das Münchnerpfund 11671 holndische Asen hat?

Operation.

Apoth. ℔ ? | 48 Münchner ℔
1 | 11671 Asen
7452 | 1 Apoth. ℔
18623 | 12
6211 | 4
46684

4 6 6 8 4 | 7 5 $\frac{10}{621}$ fl.

6 2 1

4 3 4 7

3 2 1 4

6 2 1

3 1 0 5

1 0 9

g) Jemand hatte von einem Juden 684 fl. gegen 5 procent aufgenommen, und kann es erst in 2 Jahren 8 Monaten und 12 Tagen bezahlen; was machen die Zinsen?

Operation.

fl? | 684 fl.]
| 2 J. 8 M. 12 T.]
T. 30 | 1 M.
M. 12 | 1 J.
J. 1 | 5 fl.
:5 fl. 100 |
:6 6 | 972
:6 6 | 162
:2 | 114
81

114

912

9234 | 92 fl.
100

60

2040 | 20 $\frac{2}{5}$ fl.
100

h) Es

h) Es sollen 540 fl. in Laubthalern zu 2 fl. 45 kr., oder fl. bezahlt werden, wie viel braucht man dazu?

Operation.

Laubthaler ? | 540 fl.

fl. $2\frac{3}{4}$ | 1 Laubthaler

11 | 4

2160 | $\frac{1}{1}$ 196 $\frac{4}{11}$ Laubth.

11

106

11

99

70

11

66

4

i) Was machen aber $\frac{4}{11}$ Laubthaler in Scheidemünz?

Operation.

fl. ? | $\frac{4}{11}$ Loth

1. | 11

11 | $2\frac{3}{4}$ fl.

4 | 11

Antw. 1 fl.

k) Je-

k) Irgend ein Trakteur verkauft von einem fremden Geist sein Gläschen für $2\frac{1}{2}$ kr. oder für eine bairische Landmünz. Es machen aber 5 solche Gläschen erst $\frac{1}{2}$ Aechtchen; was gewinnt er an der Maaß, wenn sie ihm selbst auf 1 fl. 12 kr. kömmt?

Operation.

fl. ?		1 Maß
		8 Aechtchen
	$\frac{1}{2}$	5 Gläschen
	1	$2\frac{1}{2}$ kr.
:5		
	60	1 fl.
:4	12	8
	3	2

(1 $\frac{1}{3}$ $3\frac{1}{3}$ fl. oder 3 fl. 20 kr.
12 1 12

Gewinn 2 fl. 8 kr.

l) Zur Abmähung einer Wiese brauchen 7 Mader 5 Täge, wenn sie täglich 4 Stund mähen. Eines Jahres wollen 3 Mader täglich 8 Stund mähen, wann werden diese fertig werden?

Operation.

{ Tag ?		
{ M. 3		1 Wiese
{ St. 8		
		5 T.
:4	W. 1	7 M.
		4 St.
	2	
	6	3(5 $\frac{1}{6}$ $5\frac{5}{6}$ oder beynahe 6 Tage

m) Zu

m) Zu einer Mauer, welche 240 Schuh lang, 30 hoch, 1 $\frac{1}{2}$ dick ist, brauchen 12 Maurer, wenn sie wöchentlich Täg und täglich 8 Stunden arbeiten, 9 $\frac{1}{2}$ Wochen. Wie l Maurer braucht man zu einer andern Mauer, die 300 huh lang 48 hoch und 3 dick wird, wenn sie in 12 Wochen tig werden sollen, die Woche zu 6 Täge, und den Tag zu Stund gerechnet?

Operation.

Maurer?
W. 12
T. 6
St. 10

300 Schuh lang
48 — — hoch
3 — — dick

240 | 12 Maurer
30 | 9 $\frac{1}{2}$ Wochen
12 $\frac{1}{2}$ | 5 Tag
8 Stund

3 | 19
2 | 8
3 | 4
12(1
76 $\frac{1}{1}$ 25 $\frac{1}{3}$ Maurer.
33

n) Ein

n) Ein Kornjud führt von München 176 Schäffel Weizen nach Mannheim. Wie viel wird dort seine Lieferung in Maltern betragen, wenn das Münchnerschäffel 11234, und das Mannheimermalter 5192 Pariserkubikzolle hält?

Operation.

Malter?	176 Münchnerschäffel
1	11234 Pariserkubikzoll
5192	1 Malter
:4	
1298	44
:2	
649	5617

44

22468

22468

247148 1/1 380 528/649 Malter.

649

1947

5244

649

5192

528

o) Wie viel wird man in ein Weinfaß, das 48 baierische
mer zu 60 Maaß hält, Getraid bringen können, da bekannt
) das hiesige Schäffel $208\frac{1}{2}$ baierische Getränkmaß faßt?

Operation.

Schäffel?	48 Eimer
1	60 Maaß
$208\frac{1}{2}$	1 Schäffel
417	2
139	16
	32
	60
1920	$\frac{1}{1}$ 13 Schäffel.
139	
	530
	139
	417
	113
	6
678	$\frac{1}{1}$ $4\frac{122}{139}$ Metzen.
139	
556	
122	

p) Nach

p) Nach Beckmanns Untersuchung wiegen 149 todte Bienen ein Loth (hanöver'sches Gewicht) Wie viel solcher Bienen würden auf ein Münchnerloth gehen, da das Münchnerpfund 11647, und das Hanoverpfund 10127 holländische Asen wiegt?

Operation.

Bienen?	1 Münchnerloth
℥	1 Pfund
1	11647 Asen
10127	1 Hanoverpfund
1	℥ Loth
1	149

104823
46588
11647
1735403 1/1 171 Bienen nebst einem Bruch.
10127
72270
10127
70889
13813
10127
3686

9) Man rechnet einen starken Bienenschwarm auf 20000 nen, was wird er ohne Korb und Bodenbret nach Münch- gewicht wägen?

Operation.

℔?	20000 Bienen
171	1 Loth
32	1 Pfund

20000 | 171 — 116 | 32 — 3 Pfund 20 $\frac{164}{171}$ Loth.

171
290
171
1190
171
1026
164

§. 10.

Von der Gesellschaftsrechnung.

Bey Vertheilungen, wo die Theile nicht gleich rden dörfen, sondern sich nach andern obwaltenden nständen richten müssen, braucht man die Gesell- aftrechnung. Sie ist demnach nichts anders, als e Anweisung, die Theile eines Ganzen so zu be- nmen, daß ihre Größe eben so verschieden aus- lt, wie gewisse zum Grund gelegte Zahlen sind. etzen wir, Albert und Christian haben sich zum pielen messingene Rechenpfenninge gekauft. Albert

gab

gab 3 kr. dazu her, und Christian 6 kr. Nehmen wir an, sie haben für ihre 9 kr. 72 Rechenpfennige erhalten; wie viel darf jeder zu sich nehmen? Es ist natürlich, daß weil Christian noch so viele Kreutzer als Albert dazu hergegeben, er auch noch so viele Rechenpfennige bekommen müsse. Dieß kann aber leicht durch zween Regeldetriansätze geschehen, wenn man nämlich sagt: 1) Die Summe des hergegebnen Geldes 9 kr. bekommt 72 Rechenpfennige; was bekommen 3 kr.? Antwort 24 Rechenpfennige. 2) Die Summe von 9 kr. bekömmt 72 Rechenpfennige; was bekommen 6 kr.? Antwort 48 kr. Will man aber lieber die reesische Regel anwenden, so geht die Sprechform so: Wie viel Rechenpfennige bekömmt man für 3 kr., wenn man für 9 kr. 72 bekömmt? u. s. f. Die Probe erscheint dadurch, wenn die Theile zusammgenommen das Ganze in der Addition genau wieder geben.

Es müssen demnach allemal jene Zahlen, nach welchen sich die Theile zu richten haben, addiert werden, so kann man die Regel Detri oder reesische Regel so oft wiederholen, als Zahlen vorhanden sind.

Manchmal soll sich jeder Theil nach zwoen zum Grund liegenden Zahlen richten. In diesen Fällen muß man allemal zwo und zwo solcher Bestimmungszahlen miteinander multiplicieren und erst dann die Produkte addieren; das übrige Geschäft geht wie oben fort. Ein Beyspiel hierüber.

Drey junge Herrn, Karl, Wilhelm und Arnold erhielten Erlaubniß Kaninchen halten zu dörfen. Karl kaufte sich vier, und ließ sie bey einer Landwirthinn 3 Wochen lang futtern, Wilhelm 6 auf

4 Wo=

Wochen und Arnold 9 auf 2 Wochen lang. Die terköſten betrugen zuletzt 6 fl.; was muß jeder u hergeben?

Operation.

4	6	9
3	4	2
12	24	18

Es iſt al:

2 4 ſo einerley ob die Landwirthinn 12,
1 8 24 und 18 Kaninchen eine Woche
5 4 gefuttert, oder die 4, 6 und 9 Ka:

hen 3, 4 und 2 Wochen; folglich iſt die Ver:rungsart gerechtfertigt.

I

fl. ?	1 2
5 4	6 fl.
9	2
3	2
	(1
	4 1/1 1 fl. 20 kr.
	3

II

fl. ?	2 4
5 4	6
9	4
3	2
	(2
	8 1/1 2 fl. 40 kr.
	3

III

III

fl. ?	x 8
3 4	6
6	2 fl.

Probe.

1)	1 fl.	20 kr.
2)	2	40
3)	2	—
	6 fl.	— kr.

Fragen.

Wann hat man Gesellschaftrechnung nöthig, und was ist sie eigentlich? Wie werden Gesellschaftrechnungen behandelt? Wie wird die Probe davon gemacht? Was giebt es für besondere Fälle der Gesellschaftrechnung? Wie muß hier zu Werke gegangen werden? Wie läßt sich diese Verfahrungsart in dem nächsten beßten Beyspiele rechtfertigen?

Exempel.

a) Drey Geschwisterte Johann, Georg und Sophie bekamen von ihrem Vätter einen Korb voll Borsdorferäpfel, mit dem Bedinge, daß sie ihn nach ihren verschiedenem Alter unter sich vertheilen sollen. Johann ist 14, Georg 11, und Sophie 9 Jahr alt. Wie viel erhält jedes Aepfel, da es in allem 180 Stücke sind?

Operation.

14
11
9
34

I

Aepfel? | x 4 Jahre

3 4 | 1 8 0
1 7 | 7
---
1 2 6 0 : 1 = 7 4 2/17 Aepfel.
1 7
---
1 1 9
---
7 0
1 7
---
6 8

2

II

Aepfel? | x 1 Jahr

3 4 | x 8 0
1 7 | 9 0
---
9 9 0 : 1 = 5 8 4/17 Aepfel.
1 7
---
8 5
---
1 4 0
1 7
---
1 3 6

4

III

Aepfel? | 9 Jahre

3 4 | x 8 ø

x 7 | 9 o

8 1 o | 1/1 4 7 11/17 Aepfel.

1 7

6 8

1 3 o

1 7

1 1 9

1 1

probe.

7 4 2/17

5 8 4/17

4 7 11/17

1 8 o Aepfel.

b) Ein andersmal schoßen sie Geld zusamm, und versuchten ihr Glück in der Lotterie. Sie gewannen 75 fl. Was trift jeden, da Johann 10 kr., Georg 36 kr. und Sophie 14 kr. dazu hergab?

Operation.

1 o

1 4

3 6

6 o kr.

I

fl.	?	x	ø	kr.
kr. 6	ø	7	8	fl.
2		(1		
		2	8	1/1 1 2 1/2 fl.
		2	2	

II

fl.	?	3	6	kr.
kr. 6	ø	7	5	fl.
x	2	1	5	
			3	
		4	5	fl.

III

fl.	?	x	4	kr.
kr. 6	ø	7	8	fl.
3	ø		7	
	6	x	8	
	2		5	
		x (1		
		3	8	1/1 1 7 1/2 fl.
		2	2	

Probe.

1	2	1/2
4	5	
1	7	1/2
7	5	fl.

c) Drey Handelsmänner schießen zu einer Spekulation Geld zusamm. A giebt 540 fl., B 600 fl., und C 750 fl. Ihr Gewinn beläuft sich auf 1200 fl., was trift jeden, da A sein Geld in 4 Monat, B in 6 Monat, und C in 10 Monat zurück nahm?

Operation.

A	B	C
540	600	750
4	6	10
2160	3600	7500
3600		
7500		
13260		

1

fl.? | 1200

13260 | 1200

12

663 | 108

13

221 | 36

1200

72

36

43200 | 1 | 195 fl.

221

2110

221

1989

1210

221

1105

105

60

6300

6 3 0 0 $\frac{1}{1}$ 2 8 $\frac{112}{221}$ Fr.
2 2 1
4 4 2
1 8 8 0
2 2 1
1 7 6 8
1 1 2

II

fl. ? | 3 6 0 0
x 3 2 6 0 | 1 2 0 0
6 6 3 | x 8 0
2 2 1 | 6 0
7 2 0 0 0 $\frac{1}{1}$ 3 2 5 fl.
2 2 1
6 6 3
5 7 0
2 2 1
4 4 2
1 2 8 0
2 2 1
1 1 0 5
1 7 5
6 0
1 0 5 0 0 $\frac{1}{1}$ 47 $\frac{113}{221}$ Fr.
2 2 1
8 8 4
1 6 6 0
2 2 1
1 5 4 7
1 1 3

III

fl. ? | 7 5 0 0

x 3 2 6 0 | 1 2 0 0

:2 — 6 6 3 — 3 7 5

:3 — 2 2 1 — 1 2 5

1 2 0 0

2 5 0

1 2 5

1 5 0 0 0 0 | 1/6 7 8 fl.

2 2 1

1 3 2 6

1 7 4 0

2 2 1

1 5 4 7

1 9 3 0

2 2 1

1 7 6 8

1 6 2

6 0

9 7 2 0 | 1/1 $43\frac{217}{221}$ kr

2 2 1

8 8 4

8 8 0

2 2 1

6 6 3

2 1 7

Probe.

A	1	9	5	fl.	2	8	$\frac{112}{221}$	kr.
B	3	2	5		4	7	$\frac{113}{221}$	
C	6	7	8		4	3	$\frac{217}{221}$	
	1	2	0	0 fl.		—		

d) Albrecht ließ an seinem Geburtstage die zween Söhne Stunde lang Schach spielen, und bestimmte einen Du- n zu 5 fl. als Preis. Die Stunde war vorüber, und Spiel blieb unvollendet. Nun beschloß der Vater, den is nach der Anzahl der gegebnen Schache zu theilen. lhelm hatte 11mal und Karl 4mal Schach au den König ben, wie viel trift jeden?

Operation.

1 1
4
1 5 Schache.

I

fl. ? | 1 1 Sch.
x 5 | 5
3 | (2
x x 1/1 3 fl. 4 0 kr.
3

II

fl. ? | 4 Sch.
x 5 | 5 fl.
3 | (1
4 1/1 1 fl. 2 0 kr.
3

Pro-

Probe.

1)	3 fl.	40 kr.
2)	1	20
	5 fl.	—

Berichtigung.

Seite 64 in der Mitte soll es statt $\frac{12}{48} = \frac{1}{4}$ Schuh oder 3 Zoll so heißen: $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$ Schuh oder $4\frac{1}{2}$ Zoll.

Bienenkunde

für die

Jugend,

von

Johann Georg Prändel

entlichem Repetitor der Mathematik und Phy-
ik auf dem churfl. Schulhause zu München.

Mit 2 Kupfertafeln.

München, 1798.
Bey Joseph Lentner.

Nro. 1630.

Meßkunde für die Jugend ꝛc.

Imprimatur

Sigmund Graf von Spretti,
Präsident,

München im churfl. Censur-
Collegio den 21. März 1797.

Regiſtr. Fol. 193.

von Bube, Sekretär.

Vorrede.

Der Knabe besucht die sogenannten Re-
schulen, oder, wie man sie sonst noch
nennen pflegt, die Vorbereitungs-
assen, wofür dieses kleine Werkchen
nächst bestimmt ist, in keiner andern
sicht, als daß er in selber entweder die
neinnützigsten Kenntnisse zur Antret-
ung seines bürgerlichen Standes sam-
elt; oder aber festen Grund legt zur
nern Fortsetzung der litterärischen Lauf-
n.

In jeder Rücksicht ist eine vorläufi-
Einleitung in die theoretische und prak-
he Meßkunde nicht nur nützlich, sondern
sogar

sogar auch nothwendig; denn sowohl der künftige Gewerbsmann als der werdende Gelehrte bedarf der geometrischen Kenntnisse weit mehr, als man beym ersten Anblicke glauben sollte. Diese offenbare Wahrheit bey unsern heutigen Zeiten noch mit Beweisthümern belegen wollen, wäre in der That überflüßig.

Nur kömmt hiebey alles darauf an, daß man für die Knabenseele gerade die leichtesten und zugleich auch die gemeinnützigsten Sätze auszuheben, und, was noch mehr gesagt haben will, auf die faßlichste Art vorzutragen wisse. Ob mir dieses, für Mathematiker sonst so seltene, Glück bey Ausarbeitung gegenwärtiger Meßkunde zu Theil geworden, kann und darf ich zwar für meine Person nicht behaupten: doch läßt mich das allgemeine

Zeug-

ugniß des In- und Auslandes, daß
inen herausgegebenen Lehrbüchern die-
Eigenschaft vorzugsweise zukomme,
ler Wahrscheinlichkeit hoffen, mit daß
ßlichkeit und gemeinnützige Anwendung
leichten Beyspielen mir auch dießmal
ht fehlgeschlagen habe.

Ob ich aber der noch kleinlichen Ju-
nd aus dem geometrischen Fache nicht
viel zum Studieren aufgebürdet habe,
eine andere Frage. Die Antwort hier-
f ist diese. Knaben von Talent und
ifer finden nicht leicht etwas zu viel;
sonders wenn Deutlichkeit und un-
rkennbarer Nutzen die Sache von selbst
npfiehlt: da im Gegentheile andere, de-
en es entweder an Genie, oder Fleiße,
er aber an beyden zugleich gebricht,
uch bey der mindesten Arbeit, die man

ihnen

ihnen vorlegt, gar bald klagen werden, man wolle ihre noch unentwickelten Fähigkeiten vollends überladen und ersticken.

Indeß ist hier bald Rath geschaft. Jeder Lehrer nehme aus diesen wenigen Bögen so viel heraus, als er glaubt, daß die Verdauungskraft seiner Zöglinge ertragen könne.

München den 26sten Christmonaths 1797.

Der Verfasser.

In=

Inhalt

der hierin vorkommenden Abschnitte.

I.

Vorläufige Erklärungen über die Gegenstände der Meßkunde, und über die verschiedene Maaderselben. Seite 1.

II.

Nähere Erklärungen von den Gegenständen der Geometrie. 10.

III.

Von Messung und Theilung der geraden Linien auf dem Felde, und von Verjüngung derselben. 13.

IV.

Von Winkeln, deren Eintheilung und Messung. 19.

V.

Von den Parallellinien. 28.

VI.

Von Flächenfiguren, vorzüglich von Dreyecken. 31.

VII.

Von der Kongruenz der Dreyecke. 35.

VIII.

Anwendung der Dreyeckskongruenz bey leichten Aufgaben und Sätzen. 60.

IX.

Von den Vierecken und ihrer Verzeichnung. 42.

X.

Von den Vielecken und ihrer Verzeichnung. 45.

XI.

Bestimmung der Winkel in den bis daher abgehandelten Flächenfiguren. 47.

XII.

Noch einige nothwendige Bemerkungen über die Flächenfiguren. 52.

XIII.

Von Berechnung der geradlinichten Figuren und des Zirkels, in Rücksicht ihres Flächeninhalts. 59.

XIV.

Anwendung der bisherigen Sätze auf das eigentliche Feldmessen. 69.

XV.

Erklärungen der Körperfiguren. 81.

XVI.

Von Ausmessung irregulärer Körper. 97.

XVII.

Auflösung der Exempel, die in diesem Werkchen dem Fleiße des Schülers überlassen worden. 100.

orläufige Erklärungen über die Gegenstände der Meßkunde, und über die verschiedenen Maaße derselben.

§. 1.

Wenn jemand anzugeben sucht, wie weit ein Ort vom andern entfernt sey: sezen wir. mphenburg von München, so sagt man, daß er Länge dieses Abstandes messe. Man nennt eine gleichen Länge eine Linie.

Bestimmt man die Größe eines Platzes, wo en der Länge desselben auch die Breite in Anschlag mt, z. B. eine gewiße Kirche fodert so und so e Marmorplatten zu ihrem Pflaster, dann mißt n eine Fläche.

Berechne ich die Größe eines Raumes, wo nes Länge und Breite auch Höhe oder Tiefe vor-

kommen muß; etwa, wie viele Verschläge sich in ein Zimmer bringen lassen; oder wie viele Tabakbüchsen in eine Kiste gehen; wie viele Ziegelsteine bey einer Mauer sind u. d. gl.; so bin ich im Begriffe, den körperlichen oder kubischen Inhalt eines solchen Raumes zu messen.

§. 2.

Man kann demnach dreyerley Dinge in der Welt messen, nämlich Längen oder Linien, dann Flächen und drittens Körper. Jede dieser Messungen hat seine eigne Verfahrungsart; daher auch die drey Theile der Meßkunde: Longimetrie, Planimetrie, Stereometrie, das ist, die Kunst 1) Linien, 2) Flächen, 3) Körper auszumessen. Es wäre also überhaupt Meßkunde, (Geometrie oder Geodäsie) die Wissenschaft, die Größe der Linien, Flächen und Körper zu bestimmen.

§. 3.

Daß das Maaß einer Linie wieder eine andere willkührlich angenommene Linie, daß Maaß der Flächen eine andere Fläche, und das der Körper ebenfalls ein anderer Körper seyn müße, ist einleuchtend. Denn eine Größe ausmessen heißt nichts anders als finden, wie oft eine andere Größe der nämlichen Art in derselben enthalten sey. Es kann aber nur Linie in Linie, Fläche in Fläche und Körper in Körper enthalten seyn; daher muß jede dieser Größe ein Maaß von ihrer Art haben.

§. 4.

§. 4.

An und für sich betrachtet liegt eigentlich nichts
n, wie groß man ein solches Maaß annehmen
; wenn es nur nachgehends im Verfolge des näm-
n Geschäftes immer sich selbst gleich bleibt. Aus
ndern Einverständniße der Meßkünstler aber ist
edem Lande ein eigenes Maaß eingeführt, das
Schuh oder Fuß heißt, und mit der Fußsoh-
inge eines erwachsenen Menschen so ziemlich über-
ist. Daher hat auch Baiern seinen eignen Schuh,
on Fig. 1 die Hälfte ist. Er verhält sich zum
iserfuß wie 12938 zu 14400 und zum rhein-
ischen Schuh wie 12938 zu 13913. Mit an-
Worten vorgetragen heißt dieß so viel, als daß
00 baierische Schuhe so viel betragen als 12938
zösische; und so viel rheinländische, nämlich 12938
n 13913 baierische.

Dieser Schuh nun wird bey uns, so wie in
meisten Ländern, von den Geometern in 10 glei-
Theile abgetheilt, und so ein Theil heißt ein Zoll;
10te Theil eines Zolles wird Linie genennt. Die
gen Künstler theilen den Schuh nach hergebrach-
Gewohnheit in 12 Zolle, und den Zoll in 12
en. Zum Unterschiede nennt man die erstere oder
netrische Eintheilung das Decimalmaaß (zehn-
liges Maaß), und leztere das Duodecimalmaaß
ölftheiliges). Die Alten hatten auch noch ein
zers Maaß als den Schuh, welches sie Ruthen
nten, und in obiger Rücksicht bald 10, bald 12
uhe hielt. Es scheint selbes aber itzt aus der
de zu kommen.

§. 5.

Aus dem angegebenen Verhältniße des baierischen Maaßes zum rheinländischen läßt sich nun folgendes Problem auflösen. Eine geographische oder deutsche Meile, wovon 15 auf einen Aequatorsgrad gehen, hält, im Durchschnitt von mehrern Angaben, 23640 rheinische Schuh. Wie viele baierische Schuh beträgt also eine Meile?

Ansatz

Baierische Schuh ?	23640 rhein. Sch.
rhein. Sch. 12938	13913 baier. Sch.

Antw. 25421 baierische Schuhe nebst einem Bruche.

• Zur Uebung können noch folgende Aufgaben dienen.

1) Ein junger Mensch mißt nach baierischen Duodecimalmaaße 7 Schuh 2 Zoll, was für eine Höhe wird er bey unserm Militär nach rheinischem Maaße haben?

2) Eine alte Kirche ist 110 englische Schuhe hoch, was wird sie nach baierischen, französischen und rheinländischen Maaße für eine Höhe überall haben; da 13511. baierische = 12938 englischen Schuhen sind?

3) Ein Uhrpendel, welches in jeder Sekunde eine Schwingung macht, muß im französischen Duodecimalmaaße 3 Schuh $8\frac{1}{2}$ Linie lang seyn, was macht dieß nach unserm baierischen Duodecimalmaaße?

4) Ein Bombenmörser nach Hrn. Vega's Angabe wirft einem Versuch zufolge, 9840 Wienerschuhe weit; wie viel beträgt dieß baierische; da 14011 Wienerfuß 13913 baierische Schuhe betragen?

§. 6.

§. 6.

Wäre so eine Marmorplatte, wovon §. 1 die
de geschah, gerade einen Schuh lang und einen
huh breit, so hätte man einen vollkommnen Be-
ff von einem Quadratschuh, der zur Messung der
chen gebraucht wird.

Der Quadratschuh hält im Decimalmaaße 100
adratzoll; denn man denke oder mache sich einen
adratschuh von Papier. Es können aus selbem
Streifen geschnitten werden, wovon jeder einen
l breit und 10 Zoll lang ist. Von jedem dieser
reifen lassen sich 10 Quadratzoll herabschneiden,
ches demnach nothwendig bey allen 10 Streifen
0 Quadratzolle werden müßen. — Vermög eines
lichen Verfahrens giebt der Quadratzoll auch eben-
s 100 Quadratlinien.

Im Duodecimalmaaße hält ein Quadratschuh
X 12 d. i. 144 Quadratzoll, und dieser 144
adratlinien; welches sich ebenfalls wieder leicht er-
ten läßt.

§. 7.

Bey Verwandlung ausländischer Quadratschuhe
baierische, oder dieser in jene, muß das gegebene
rhältniß doppelt angesetzt werden, weil, wie oben
1 gesagt worden, bey Flächen neben der Länge
h Breite in die Rechnung zu ziehen ist. Folgen-
Aufgabe soll die Sache versinnlichen.

Im

Im Innviertel hält irgend eine Wiese 140820 Quadratfüße. Wie viel solcher Füße mißt sie nach wienerischem Maaße, wenn 12938 Wienerlängenschuhe 14011 solche baierische machen?

Ansatz

Wien. Quadratsch. ?		140820 baier. Quadratsch.		
in der Länge	14011	12938 in der Länge		
u.		u.		Quadr. sch.
in der Breite	14011	12938 in der Breite		

Antwort. 120077 wienerische Quadratschuhe.

* Noch zwey Exempel zur Uebung!

1) Ein Augsburgerjouchart hält 16000 Quadratschuh des nämlichen Maaßes; was wird selbes nach baierischen Schuhen halten, wenn 18 Augsburgerschuh beynahe $18\frac{3}{10}$ baierische auswerfen?

2) Ein baierisches Tagwerk oder Morgen hält 40000 Quadratschuh; wie viel Quadratschuhe beträgt das im rheinischen Maaße?

3) Es sollen 29 Berlinerquadratfuß und 54 derley Decimalzoll in Königsbergermaaß verwandelt werden; wie viel geben selbe? Es machen aber 18640 Berliner = 13730 Königsbergerschuhe Längenmaaß.

§. 8.

Hätten die Ziegelsteine bey einer Mauer durchgehends einen Schuh Länge, einen Schuh Breite und einen Schuh Höhe, so würden selbe lauter Kubikschuhe seyn.

§. 9.

Der Kubikfuß hat 1000 Decimal- oder 1728 Duodecimalzolle, und der Zoll eben so viele Linien.

Denn

nn man kann den Kubikschuh in 10 Tafeln schnei-
, wovon jede einen Zoll hoch ist. Jede Tafel
bt 10 Stängchen, zu einem Zoll breit und dick,
jedes Stängchen giebt 10 Kubikzoll, folglich alle
X 10 X 10 = 1000, so wie beym Duodeci-
lmaaße 12 X 12 X 12 = 1728. Eine ähnli-
Bewandtniß hat es auch mit den Kubiklinien.

§. 10.

Bey Verwandlung der kubischen Maaße ver-
iedner Länder in einander, müßen die Verhält-
ße wegen Länge, Breite und Höhe dreymal un-
einander gesetzt werden, wie aus folgendem Bey-
el erhellet. Eine steinerne Säule hat 18 Pa-
erkubikfüße und 1240 derley Zolle Duodeci-
almaaß; wie viel wird sie in rheinländischen
chuhen und Zollen halten, wenn 13913 Pari-
füße, 14400 rheinische Schuhe Längenmaaß
tragen?

Ansatz

Rheinische K.?	18 Sch.	1240 Z. Pariserm.	
ris. { 13913	14400	}	rhein. Sch.
ris. { 13913	14400	}	rhein. Sch.
ris. { 13913	14400	}	rhein. Sch.
Zoll 1720	1 Sch.		

Antw. 25 Kubikschuh, und nicht gar 426
ubikzoll rheinisch.

Folgendes mag zur Uebung dienen.

1) Ein baierisches Schäffel hält 11259 Pariserkubikzoll Duodecimalmaaß; wie viel hält es baierische Kubikschuhe und Zolle, wenn 12938 Pariserzoll Längenmaaß 14400 baierische Zolle geben?

2) Was

2) Was machen 128 Kubikfuß Leipzigermaaß in Mannheimerschuhen; wenn 12865 Längenschuh der ersten Gattung 12520 der letztern geben?

§. 11.

Tritt der Fall ein, daß Decimalmaaß in Duodecimalmaaß oder wechselsweise verwandelt werden soll, so darf nur der Kettensatz zu Hilfe genommen werden. Das Beyspiel von einer einfachen Länge: Was machen 8 Decimalzoll und 3 Decimallinien im Duodecimalmaaße? giebt diese Anschreibung und Berechnung:

Duod. Zoll?	8 Zoll 3 Linien Decim.
10	1 Zoll
10	12 Duodecim. Zoll.

83
12
166

83	
996	9 Zoll
100	
12	
192	4
96	
1152	11 $\frac{13}{25}$ Linien.
200	

Umgekehrt geht es eben so. Man darf nur folgende Rechnung einsehen: Was geben 11 Zoll und 8 Linien Duodecimalmaaß im Decimalmaaße?

Decim.

Decim. Zoll? | xx Z. 8 L. Duod.
xz | 1 Z.
xz | x0 Z. Decimal.

3 | x30
6 | 35
5
175 - 9 Zoll
18
162
13
10 2
130 - 7 2/9 Linien.
18
126
4

* Exempel. Die baierische Elle hält 2 Schuh, 7 Zoll und Linie Decimalmaaß; wie groß ist sie im Duodecimalmaaße?

§. 12.

Zur Bezeichnug der Schuhe, Zolle und Linien dient man sich der Strichchen, die man rechts über e Zahl hinauf schreibt. Die Schuhe haben ei- en Strich, die Zolle zween, und die Linien drey. at man auch Ruthen anzumerken, so giebt man

° ' '' '''

nen ein Ringelchen. Die Größe 19 8 5 7, ird demnach so gelesen: 19 Ruthen, 8 Schuhe, Zolle und 7 Linien. Diese Bezeichnungsart bleibt nmer die nämliche, es mag Decimal- over Duodes- malmaaß seyn; man mag Längen- oder Flächen- der Körpermaaß darunter verstehen; indem sich der nterschied entweder aus den Umständen ergiebt, oder

im

im Falle man Mißverstand beförchten könnte, ausdrücklich mit Worten angemerkt wird.

Nähere Erklärungen von den Gegenständen der Geometrie.

§. 13.

Ein **Punkt** ist das einfachste Zeichen eines Ortes, z. B. auf dem Erdglobus das Zeichen einer Stadt. Je kleiner man denselben macht, desto näher kömmt er dem **mathematischen Punkte**, der lediglich gar keine Länge, Breite und Höhe hat, und eben deßwegen von uns nicht gemacht werden kann, sondern sich bloß denken läßt.

§. 14.

Eine Reihe von Punkten, wo einer an den andern stößt, ist eine **Linie**. Man nennt sie mathematisch, wenn sie durchgehends keine Breite hat; die wir aber schlechterdings nicht zeichnen können.

Setzt man mehrere Linien nahe an einander, ungefähr wie die Fäden eines Tuches oder einer Leinwat, so entsteht eine Fläche, welche im mathematischen Sinn gar keine Dicke haben soll.

Mehrere auf einander liegende Flächen, wie etwa die Blätter eines Buches, geben endlich einen Körper, der wiederum, mathematisch betrachtet, so beschaffen seyn muß, daß nicht der kleinste leere Zwi-

enraum sich in selbem vorfindet. Da es aber in r ganzen Schöpfung keinen solchen Körper giebt; ndern alle bald mehr, bald weniger leere Zwischen- ume haben: so begnügt man sich bloß den Raum messen, welchen der Körper sammt seinen Zwi- enräumen ausfüllt. So füllt z. B. eine Klafter olz mit Scheitern und Zwischenräumen 126 Kubik- uhe aus.

§. 15.

Es giebt zweyerley Linien, **gerade** und **krum-** e; gerade ist jene, wo zwischen ihren beyden End- nkten keine kürzere Linie sich ziehen läßt, sondern sie lbst die kürzeste ist. Im widrigen Fall ist die Li- e krumm, oder aus mehrern geraden Linien zusamm- esetzt. So ist Fig. 2 zwischen den zween Punkten und c die Linie a b c **gerade**, und a d c **krumm.** s giebt auch eine Menge Linien in der Natur, die us geraden und krummen Linien zugleich bestehen.

§. 16.

Unter allen krummen Linien ist der **Zirkel** oder er Kreis die einfachste und zu Zeichnungen die noth- endigste. Er entsteht, wenn sich eine gerade Linie m einen ihrer beyden Endpunkte auf einer ebnen läche ganz herum bewegt. Eben wird aber dann ie Fläche genennt, wenn sie aus lauter geraden Li- ien zusammgesetzt ist.

Jener Punkt, um welchen sich die gerade Li- nie herum bewegt, heißt **Mittelpunkt** (Centrum). Die gerade Linie selbst wird **Strahl** (Radius) ge- nennt. Die krumme Linie, welche vom andern End-

punkte

punkte des Strahls beschrieben worden, bekömmt den Namen Peripherie oder auch Kreislinie. Die gerade Linie durch den Mittelpunkt, oder die zween sich entgegengesetzten Radiusse, heißt Diameter, Durchmesser. Die Sehne ist jede gerade Linie zwischen zween Punkten der Peripherie. Was immer für einen Theil von dieser Peripherie, er mag klein oder groß seyn, nennt man einen Bogen (arcus). Fig. 3 ist dieß anschaulich gemacht.

§. 17.

Man ist übereins gekommen, sich jeden Zirkel, oder eigentlicher zu reden, die Peripherie jedes Zirkels in 360 gleiche Theile abgetheilt vorzustellen, welche Theile man Grade nennt. Es ist natürlich, daß bey kleinen Zirkeln diese Grade sehr klein, bey großen hingegen auch groß ausfallen müßen. So z. B. hält ein Grad von einem Zirkel, der um die Erdkugel herumgeht, 15 deutsche Meilen.

Man theilt jeden Grad wieder in 60 gleiche Theile ab, und heißt sie Minuten; die Minute wird mehrmals in 60 gleiche Theile getheilt, die man Sekunden nennt. Eine Minute hält auf obgedachtem Zirkel des Erdbodens eine Länge von 6335, und eine Sekunde von 105 baierischen Schuhen.

§. 18.

Die Bezeichnungsart der Grade, Minuten und Sekunden ist die nämliche, so wie jene der Ruthen, Schuhen und Zollen. Die Grade bekommen rechts darüber ein kleines Null oder Ringelchen, die Minuten ein, und die Sekunden zwey Strichchen. Es heißt daher $21^{\circ}\ 14'\ 8''$ so viel als 21 Grade, 14 Minuten und 8 Sekunden. Aber

Aber können die Ruthen, Schuhe und Zolle
n Graden, Minuten und Sekunden weggekannt
erden? — Freylich nicht, wenn diese Zahlen sammt
ren Zeichen so ganz allein dastehen; aber wenn man
e übrigen Umstände und das, wovon eigentlich die
ede ist, nur ein bischen überdenkt, so muß es sich
gleich zeigen, ob Grade oder Ruthen u. s. f. dar-
ter verstanden werden. Es verhält sich hier die
ache eben so, wie bey einigen Wörtern in der la-
nischen Sprache, z. B. beym Worte cura. Wenn
allein dasteht, so ist der beste Grammatiker nicht
t Stande zu sagen, ob es das Hauptwort oder
e befehlende Art des Zeitwortes sey. Steht es
er im Konterte, und heißt z. E. cura & labor,
er cura vt valeas, so verschwindet aller Zweifel von
lbsten.

Von Messung und Theilung der geraden Linien auf dem Felde, und von Verjüngung derselben.

§. 19.

Die Linien auf dem Felde lassen sich entweder un-
ittelbar durch Ketten, Seile oder Stangen messen;
der man ist im Stande ihre Länge mittels Schlüße
nd Folgerungen herausbringen. Von der letztern
rt können wir bis daher noch nichts sagen, wohl
ber von der erstern.

§. 20.

Man bedient sich gegenwärtig meistens der eise-
nen Ketten, welche der Bequemlichkeit zu lieb aus

100 Gliedern besteht, wovon jedes einen Schuh mißt. Nach 10 Schuhen kömmt allemal ein Gelenk von Meßing, das mit dem entsprechenden Numer bezeichnet ist.

§. 21.

Will man eine Linie auf dem Felde wirklich messen, so steckt man in die beyden Endpunkte Fahnen, oder bey kleinen Entfernungen auch Stäbe ein. Es wird aber hier vorausgesetzt, daß man von einem Endpunkte zum andern sehen könne, und also kein Hinderniß z. B. ein Gehölz, Berg u. d. gl. dazwischen aufstosse.

Bey einem dieser Endpunkte wird der letzte Ring der Meßkette befestigt, sie selbst aber von einer zweyten Person, die der Kettenzieher heißt, beym ersten Ring ergriffen, und so lange in der Richtungslinie fortgezogen, bis sie ganz ausgestreckt ist. Man muß aber dabey Acht haben, ob nicht irgend ein Ring überschlagen oder sonst ein Glied verrenkt sey.

Nun stellt sich der Feldmesser hinter die Fahne oder den Stab, wo die Kette befestigt ist, und winkt den Kettenzieher so lange rechts oder links, bis desselben Stab, den er in dem ersten Ring der Kette gesteckt hält, sich mit den Stäben der beyden Endpunkte in einer Linie befindet; das heißt mit andern Worten; bis des Feldmessers Aug hinter seinen Stab weder den Stab des Kettenziehers, noch den Endpunkt der zu messenden Linie erblickt.

Hier wird ein kleiner Holzspalt oder sogenann- Pflock eingeschlagen, dann die Kette beym letzten nge losgelassen, und so lange wieder fortgezogen, der letzte Ring an den eben besagten Pflock an- teckt werden kann.

Der Kettenzieher wird mehrmal durch Winken echt gewiesen, ein neuer Pflock eingeschlagen, und fortgefahren, bis man zu Ende ist.

So viel nun Pflöcke gebraucht werden, so oft t man 100 Schuhe. Vom letzten Pflocke bis zum eichten Endpunkte können die noch übrigen Schu, wenn man die Kette daran hingezogen hat, leicht ählt, und dazu addiert werden. Z. B. es wä- 7 Pflöcke eingeschlagen, und vom siebenten Pflo- bis zum Endpunkte noch 38 Schuhe befunden wor- n, so hielt die Linie 738 Schuhe.

§. 22.

Will man solche Linien zu Papier bringen, so üßen selbe beträchtlich kleiner gemacht werden, wel- es man **Linien verjüngen** heißt. Eine Gegend fnehmen will daher nichts anders sagen, als sie klein machen, daß sie sich in einer ähnlichen Ge- lt zu Papier bringen läßt. Meistentheils werden die nien auf dem Felde 4000mal kleiner, als sie wirk- h sind, auf das Papier aufgetragen: manchmal ch 6000 mal kleiner *). Dieß kann man mittels einer

*) Von dieser letztern Art ist der vom Hrn. Nettenleiter in Kupfer gestochene Plan des in Kultur stehenden Donau- mooses.

einer sogenannten Skale leisten; man versteht darunter weiter nichts anders als einen verjüngten Maaßstab, auf welchen der landesübliche Schuh in so viel gleiche Theile getheilt ist, als man verlangt. Man ist dadurch in Stand gesetzt, kürzere Linien in Schuhen, Zollen und Linien verjüngt aufzutragen, oder auch große Linien, wobey nur auf Schuh und nicht mehr auf Zolle, noch weniger auf Linien gesehen werden kann, zu verjüngen.

§. 23.

Aufgabe. Eine namhafte Länge von Schuhen, wobey man nicht auf Zolle geschweigens auf Linien sehen kann, zu verjüngen.

Auflös. Aus der 4ten Figur erhellet, daß die Skale durch Zwerchschnitte in mehrere Hauptfächer eingetheilt, und das oberste Fach derselben mit dicht neben einander gezognen Querlinien versehen sey. Wenn nun die gegebene Anzahl der Schuhe aus Hunderter, Zehner und Einheiten besteht, so setzt man den einen Fuß des Handzirkels an jenen Zwerchschnitt hin, wo die verlangte Zahl der Hunderter angemerkt steht, eröffnet den andern Fuß bis an jenes Ziffer im Fache der Querlinien, das die gegebnen Zehner anzeigt, ziehe sodann den Zirkel unverrückt und mit beyden Schenkeln zugleich von der Linken zur Rechten auf der heruntern Querabtheilung fort, bis man jene Senklinie erreicht, welche oben mit der verlangten Zahl der Einheiten bemerkt ist; so wird der obere Schenkel die schiefe, aufwärtsgehende Querlinie in etwas verlassen haben. Wenn nun die Zirkelöffnung bis

zur

selben erweitert wird, so hat man die vorgegebe-
Linie im verjüngten Maaße aufgefaßt, und kann
leicht zu Papier gebracht werden. Die in der
ur vorgestellte Zirkelöffnung hält daher 186 Schuhe.

Hat die Anzahl der gegebnen Schuhe keine Ein-
en, sondern bloß Hunderter und Zehner, so fällt
Herüberziehen des Zirkels von selbst weg.

§. 24.

Ist der Maaßstab zu Verjüngung einer Linie
klein, so wird die Skale selbst so oft aufgetragen,
oft die Anzahl der darauf verzeichneten Schuhe
der gegebenen Linie enthalten ist, und der Rest
h obiger Anweisung daran gesetzt. Wie oft aber
Skale in der gegebnen Anzahl Schuhe enthal-
sey, und was der Rest noch betrage, weiset die
ision.

Es soll z. B. auf unsrer Skale, die nur
Schuhe mißt, eine Länge von 1128 Schuhen
jüngt werden. Die Division 1128: 400 giebt
Skalelängen und noch 328 Schuhe zum Reste.
an trägt daher den ganzen Maaßstab zweymal auf
Linie hin, und setzt nach obiger Anweisung §. 23.
338 Schuhe noch daran, so ist das Geschäft zu
de.

Exempel. Die hiesige Stiftskirche zu unser lieben Frau
ist 336 Schuhe lang (so hoch sind auch die beyden Thür-
me), und 128 Schuhe breit. — Die hiesige Maltheserkir-
che hat 284 Fuß Länge und 114 Fuß Breite. — Die Kir-
che der Theatiner mißt in der Länge 256 und in der Brei-
te 126 Fuß. Man verjünge diese 6 gegebenen Größen!

§. 25.

Aufgabe. Eine gegebne Länge von Schuhen, Zollen und Linien, dergleichen in der Baukunst vorzukommen pflegen, durch Hilfe des nämlichen Maaßstabes zu verjüngen.

Auflös. Man lasse auf dem Maaßstabe das, was vorhin §§ 23 u. 24. für 100 Schuhe angenommen worden, nur für einen Schuh gelten; das was vorher 10 Schuh gegolten, gelte einen Zoll u. s. f., so ist die zehnfache Abstuffung eben so gut auch auf Schuh, Zoll und Linie anwendbar: vorausgesetzt, daß es Decimalmaaß sey; denn im widrigen Falle müßte das Duodecimalmaaß nach obiger Anleitung §. 11. erst in solches verwandelt werden. Es hält demnach die Zirkelöffnung, welche §. 23. 186 Schuhe gemessen, in diesem Falle 1 Schuh, 8 Zoll und 6 Linien; so wie die §. 24. von 1128 Schuhen hier 11 Schuhe, 2 Zoll und 8 Linien beträgt.

* Exempel. Karl möchte gerne die Mannheimerelle und die Münchnerelle nebeneinander verjüngt sehen. Es gilt ihm gleich, nach welchem Maaßstabe. Die erstere hält, wie schon einmal gesagt worden, 2 Schuh, 7 Zoll und die letztere 4 Schuh und 5 Linien, alles Decimalmaaß. Man befriedige Karls Wunsch!

§. 26.

Oft ereignet sich's auch, daß man Linien, die schon zu Papier gebracht sind, messen soll. Die Sache hat keine Schwierigkeit. Man faßt die zu messende Linie mit dem Handzirkel auf, und zieht denselben solang mit einem Schenkel auf einer heruntern

Zwerch-

Zwerchabtheilung, und mit dem andern oben in den engen Querfächern fort, bis diese obere Spitze irgendwo genau einfällt. Die entsprechende Zahl ist daß Maaß einer solchen Linie.

Von Winkeln, deren Eintheilung und Messung.

§. 27.

Wenn zwo gerade Linien sich schneiden, oder mit ihren Endpunkten einander berühren: kurz, wenn zwo Linien irgendwo einen Punkt gemeinschaftlich haben, so entstehen **Winkel**. So ein gemeinschaftlicher Punkt nun heißt der **Scheitel** des Winkels, und die beyden vom Scheitel ausgehenden Linien werden **Schenkel** genannt. Die Winkel sind in der Meßkunst oft ein nothwendiges Bedürfniß. Man theilt sie ein in **rechte, spitzige** und **stumpfe** Winkel. Recht ist der Winkel, wenn sich mit einem Handzirkel aus dem Scheitelpunkt von einem Schenkel zum andern ein Bogen von 90°, oder der vierte Theil der Peripherie, beschreiben läßt. Wird der Bogen kleiner als 90°, so heißt der Winkel spitzig, wird er größer, stumpf. So ist z. B. Fig. 4 ein rechter, Fig. 5 ein spitziger und Fig. 6 ein stumpfer Winkel.

Hat der Bogen zwischen zween Schenkeln 180°, so verschwindet der Winkel, und die zween abgeschnittnen Schenkel machen eine gerade Linie, nämlich den Diameter aus.

Ist gähling der Bogen größer als 180°, wie Fig. 7, so heißt der Winkel **ausspringend**.

§. 28.

Die Schenkel eines rechten Winkels werden **Lothen** oder **Perpendikel** genennt, oder man sagt, daß eine Linie auf der andern **lothrecht**, **senkrecht** oder **perpendikulär** stehe.

§. 29.

Es gilt gleichviel, ob man die Schenkel eines Winkels lang oder kurz macht; weil bloß die Lage der Schenkel gegen einander die Größe des Winkels bestimmt. Eben so willkührlich ist es, den Zirkelbogen als Maaß des Winkels mit einem großen oder kleinen Radius zu beschreiben; weil dadurch nicht die Anzahl der Grade, sondern bloß die Größe derselben geändert wird. Ein rechter Winkel hat allemal den vierten Theil des Zirkels, das ist, 90° zum Maaße, es mag der Zirkel groß oder klein seyn, und ein spitziger Winkel wird nie 90° zum Maaße erhalten können, man mag die Schenkel und den Radius so groß annehmen, als man will.

§. 30.

Winkel werden auf zweyerley Weise bezeichnet, entweder mit drey Buchstaben oder mit einem. Ist das erste, so setzt man die Buchstaben an die Endpunkte der Schenkel, und nennt oder schreibt allemal jenen Buchstaben in der Mitte der am Scheitel steht. Im zweyten Fall stellt man einen geschmeidigen Buchstaben, als m, n, x, o u. d. gl. in die Neigung hinein. Daher Fig. 5 der Winkel a c b oder b c a; nicht c b a oder a b c: und Fig. 6 der Winkel m.

§. 31.

Um Winkel, die schon auf dem Papiere gezeichnet sind, wirklich zu messen, oder gegebene Winkel zu Papier zu bringen, hat man ein eigenes dazu bestimmtes Instrument, das man Transportär heißt, und einen in 180° abgetheilten halben Zirkel vorstellt. Fig. 8 ist ein Entwurf davon. Soll nun ein Winkel auf dem Papiere gemessen werden, so bringt man den Mittelpunkt c an den Scheitel des gegebnen Winkels, läßt einen der beyden Schenkel (es ist gleich viel welchen) von einem Halbmesser decken, und sieht, wie viel Grade der andere Schenkel abschneidet.

Es befinden sich aber auf dem Transportär zwo Reihen von Gradzahlen, die gegen einander laufen. Man muß daher allemal jene Reihe als geltend ansehen, die sich bey einem Schenkel des Winkels anfängt, und beym andern Schenkel aufhört oder wenigst abgeschnitten wird. In unsrer Figur hat demnach der Winkel a c d nicht 150°, sondern 30°, obgleich der Schenkel a c beyde Zahlen abschneidet; weil die Reihe, wo 30° abgeschnitten werden, beym andern Schenkel d c zu zählen anfängt. Die Zahl 150° wäre nur dann zu gebrauchen, wenn allenfalls der stumpfe Winkel a c f gemessen werden müßte.

§. 32.

Man sieht daraus, daß man auf diese Art die Winkel nur in Graden, und nicht zugleich auch in Minuten oder Sekunden zu messen im Stande ist. Indeß kann ein gutes Aug noch immer halbe und

Viertelsgrade unterscheiden, womit man sich also gleichwohl begnügen muß.

§. 33.

Soll ein gegebner Winkel aufgetragen werden, so mache man allererst eine Linie, lege den Mittelpunkt des Instruments auf jenen Endpunkt, wo der Scheitel des Winkels zu stehen kommen soll, bedecke die Linie mit dem Halbmesser, und mache bey jener Zahl, die die gegebnen Grade anzeigt, und dessen Reihe auch bey der Linie anfangen muß, einen Punkt auf das Papier. Zieht man nun von diesem Punkte bis an den Scheitelpunkt eine Linie, so ist das Geschäft fertig.

* Exempel 1) Die Ekliptik durchschneidet den Aequator unter einem Winkel von $23\frac{1}{2}^{\circ}$; wie sieht dieser Winkel, zu Papier gebracht, aus?

2) Die Erdachse durchschneidet den Münchnerhorizont unter einem Winkel von $48\frac{1}{2}^{\circ}$, und den Horizont von Petersburg unter $55\frac{1}{2}^{\circ}$; man bringe diese beyden Winkel zu Papier!

§. 34.

Wenn aus irgend einem Punkte einer geraden Linie eine andere oder auch mehrere gezogen werden, so heißen die dadurch entstandnen Winkel Nebenwinkel, wie etwa Fig. 9 x und y, dann Fig. 10 m, r und s.

Nebenwinkel halten allemal miteinander 180°; denn aus ihrem gemeinschäftlichen Scheitelpunkte läßt sich ein halber Zirkel als ihr Maaß beschreiben; weil die ursprüngliche gerade Linie dadurch zum Diameter wird, und den ganzen Zirkel in zween gleiche Theile theilt. Ein halber Zirkel hält aber nach §. 17. $\frac{360}{2}° = 180°$.

* Wünscht man etwa den Beweis dieses Satzes, so wie mehrere in der Folge lieber algebraisch zu sehen, so müßen ein für allemal nachstehende Grundwahrheiten vorangeschickt werden:

1) Wird Gleiches zu Gleichen addiert, so bleibt die Gleichheit.

Z. B. Karl sowohl als Fritz hat jeder 5 fl., folglich gleich viel: giebt man nun jedem noch 2 oder 3 fl., oder was immer, so haben sie am Ende allemal gleich viel.

2) Wird Gleiches von Gleichen abgezogen, so bleibt die Gleichheit.

Nimmt man Karln sowohl als Fritzen von den 5 fl. gleich viel, etwa 1 fl., 2. u. d. gl., so bleibt ihnen allemal wieder gleich viel.

3) Multipliciert man Gleiches mit Gleichem, so erhält man die Gleichheit.

4) Dividiert man Gleiches durch Gleiches, so wird die Gleichheit auf keine Weise gestört.

5) Man kann in jeder Größe Gleiches für Gleiches setzen (substituieren), ohne ihren Werth zu ändern.

Wenn jemand einen Gulden Geld hat, und ein andrer giebt statt einem Zwölfer, der sich dabey befindet, zween Sechser, oder 4 Groschen, so hat er so viel wieder als zuvor.

6) Wenn

6) Wenn zwo Größen irgend einer dritten Größe gleich sind, so sind die beyden Größen unter sich ebenfalls gleich.

Vier Laubthaler sind so viel werth, als eine Karoline: 55 Zwölfer sind auch so viel werth, als eine Karoline; also haben 4 Laubthaler, und 55 Zwölfer einerley Werth.

Es sieht nun die algebraische Beweisführung über die Wahrheit, daß alle Nebenwinkel zusammen 180° halten, so aus.

Satz.

Fig. 10. $m + r + s = 180^\circ$

Beweis.

$m = a\,d$

$r = a\,b$

$s = b\,c$

$m + r + s = a\,d + a\,b + b\,c$

aber $a\,d + a\,b + b\,c = 180^\circ$

also $m + r + s = 180^\circ$.

§. 35.

Wenn also von zweenen Nebenwinkeln einer bekannt ist, so weiß man auch das Maaß des andern; denn das, was dem bekannten von 180° noch abgeht, muß der andere zum Maaße haben. Z. B. Einer von zweenen Nebenwinkeln hat $37^\circ\ 19'$, was mißt der andere?

An.

Ansatz.

180°

37° 19′

Antw. 142° 41′.

* Exempel. Der Sonnenstrahl macht am Mittage des Sommeranfangs mit dem Münchnerhorizonte gegen Süden einen Winkel von $64^{\circ}\ 52'$, am Mittage des Herbst- und Frühlinganfangs $41^{\circ}\ 22'$ und am Mittage des Winteranfangs $17^{\circ}\ 52'$; wie groß ist allemal der Winkel, den der Sonnenstrahl mit unserm Horizonte gegen Norden macht?

§. 36.

Wenn einer von zweenen Nebenwinkeln ein rechter ist, so muß auch der andere ein rechter seyn; denn $90^{\circ} + 90^{\circ} = 180^{\circ}$.

§. 37.

Zwo gerade Linien, die sich durchschneiden, bilden zween und zween sich entgegen gesetzte Winkel, die man Scheitelwinkel (Vertikalwinkel) nennt, wie Fig. 11 o und x, dann y und m.

§. 38.

Vertikalwinkel sind gleich; denn jeder läßt sich durch den nämlichen dritten Winkel zu 180° ergänzen. So hält z. B. der Winkel o mit dem Winkel y eben so gut 180°, als x mit dem nämlichen o; weil man allemal Nebenwinkel bekömmt.

*) Algebraische Form des Beweises.

Sätze.

1) $o = x$

2) $y = m$.

Beweise.

1) $o + y = 180°$
$y + x = 180°$ } als Nebenw.

$o + y = y + x$
$- y \quad - y$

$o = x$.

2) $y + x = 180°$
$x + m = 180°$

$y + x = x + m$
$- x \quad - x$

$y = m$.

§. 39.

Ist von 4 Vertikalwinkeln einer bekannt, so sind alle vier gegeben. Denn man ziehe den bekannten Winkel von 180° ab, so bleibt sein Nebenwinkel. Da nun jeder dieser Winkel seinen gleichen Vertikalwinkel hat, so sind nothwendig alle 4 Winkel bekannt. Es halte z. B. der Winkel o genau 30° 47′; folglich der Nebenwinkel laut Rechnung

180

30 47

149° 13′ als stumpfer Winkel,

folglich auch x = 30° 47′ und m = 149° 13′.

§. 40.

Aufgabe. Einen Winkel auf dem Felde zu messen.

Auflös. Man setze den Winkelmesser, (Winkelscheibe) welcher ein auf das Stativ gesetzter, und in seine Grade eingetheilter Zirkel ist, in den Scheitel des Winkels, und ziele durch die Dioptern (Absehen) des herumbeweglichen Lineals, oder durch das darauf angebrachte Sehrohr nach den Endpunkte eines Schenkels, welche man beyde im Bedärfungsfalle durch aufgesteckte Fahnen oder Stäbe sichtbar machen kann.

Eigentlich ist das so zu verstehen. Man drehet das Diopternlineal oder das Sehrohrlineal (man nennt es allgemein die Alhidade) dahin, wo die Grade mit Null anfangen. Nun wird die bewegliche Scheibe sammt der unverrückten Alhidade so lange umgedreht, bis man durch diese letztere den einen der Endpunkte des Winkels erblickt. Man befestigt itzt die Scheibe durch eine Schraube, bewegt die Alhidade allein nach dem andern Endpunkt, und zählt die Grade, die die Alhidade abschneidet, so ist die Größe des Winkels bestimmt. Fig. 12 suchte ich den Begriff hievon in etwas zu versinnlichen, wo ein Winkel, den zwo Baumalleen miteinander machen, gemessen wird.

§. 41.

§. 41.

Oft läßt sich der Nebenwinkel oder ein Vertikalwinkel bequemer messen; in welchen Fällen man dann allemal nach §§. 35 u. 38. auf die Größe des eigentlichen Winkels zu schließen im Stande ist.

Von den Parallellinien.

§. 42.

Wenn zwo gerade Linien solch eine Lage gegeneinander haben, daß sie, man mag sie beyde vorwärts oder rückwärts verlängern, sich weder einander nähern, noch voneinander entfernen, so heißen selbe **Parallellinien**. Man drückt die Parallelität (Parallelismus) zwoer Linien durch das Zeichen ∥ aus.

§. 43.

Aufgabe. Man giebt eine Linie, und es soll eine andere damit in einer bestimmten Entfernung parallel gezogen werden.

Auflös. Wenn die Entfernung durch irgend einen Punkt bestimmt worden, so setzt man den Handzirkel in den gegebenen Punkt ein, und öffnet ihn so weit, bis er die Linie berührt, aber nicht schneidet. Mit dieser Oeffnung setzt man den Zirkel in einer beliebigen Entfernung in die Linie ein, und beschreibt einen Bogen. Durch den Punkt wird nun eine solche Linie gezogen, daß sie den Bogen nur berührt, und wenn man sie verlängert, ihn nicht durchschneidet. Diese Linie ist mit der gegebnen parallel.

Denn

Denn sie ist nirgends weiter als um die Länge des Radius von der andern entfernt.

Es sey z. B. Fig. 13 die Linie f g und der Punkt a gegeben. Man suche den Abstand desselben von f g, nämlich a b, setze den Zirkel in d oder g ein, beschreibe einen Bogen darüber, und ziehe die Linie a c, so ist a b = c d die Parallelweite.

§. 44.

Durchschneidet man eine dieser Parallellinien mittels einer dritten geraden Linie, wo immer, Fig. 14. so entstehen nach §. 37 **Vertikalwinkel**; und wenn die schneidende Linie in der nämlichen Richtung so lange fortgeführt wird, bis sie auch die andere schneidet, so bilden sich auch hier die nämlichen Vertikalwinkel, wie bey der erstern. Denn jede dieser beyden Parallellinien behält mit der schneidenden Linie die nämliche Lage bey, sie mögen weit von einander entfernt seyn oder nicht. Rückt man sie immer näher und näher zusammen, bis sie eine einzige Linie ausmachen, so sind die beyderley Vertikalwinkel in einerley verwandelt worden. Folglich waren sie vorher an Größe nie voneinander unterschieden. Fig. 14 ist daher y = Y, auch x = X, o = O und r = R. Nach der Kunstsprache zu reden, heißen y und Y, oder x und X, oder r und R, oder endlich o und O **innere und äußere Winkel**. Ferner nennt r und Y, so auch o und X **Wechselwinkel**; weil einer diesseits, der andere jenseits der schneidenden Linie, der eine oben, der andere unten zu stehen kömmt, folglich nach Ort und Lage wechseln. Endlich heißen o und Y oder x und X **innere Winkel zwischen Parallelen.**

§. 45.

Zween innere Winkel machen allemal zusammen 180°. Denn y und o halten als Nebenwinkel 180°; da aber y und Y gleich große Winkel sind, so ist es einerley, ob ich zum Winkel o das y oder das Y nehme, ich bekomme allemal 180°. Eben so geht der Beweis für die innern Winkel r und X.

§. 46.

Die Wechselwinkel sind gleich. Denn es ist gleich viel, ob man den Winkel o zum Winkel r oder zum Winkel Y rechnet; man bekömmt in jedem Falle 180°: im ersten Falle als Nebenwinkel im zweyten nach §. 44 als innere Winkel.

§. 47.

Jeder äußere Winkel ist dem innern entgegenstehenden Winkel gleich, z. B. y dem Y; denn der Winkel o ergänzt jeden zu 180°.

* Hier folgen auch die algebraischen Beweise dieser drey

Sätze

1) $o + Y = 180°$

2) $r = Y$

3) $y = Y$

Beweise.

1) $o + y = 180°$

aber $y = Y$

substituirt $o + Y = 180°$.

2)

2) $o + Y = 180°$; wie eben erwie-
$o + r = 180°$. sen worden.

$o + r = o + Y$

$- o \quad - o.$

$r = Y.$

3) $o + Y = 180°$

$o + y = 180°$

$o + Y = o + y$

$- o \quad - o$

$Y = y.$

Von Flächenfiguren, vorzüglich von Dreyecken.

§. 48.

Eine Flächenfigur ist ein von Linien allenthalben begränzter Raum. Die Gränzen können entweder gerade oder krumme Linien seyn. Wir handeln hier von der erstern Gattung Flächen, und nehmen von der letzten bloß die Zirkelfläche vor die Hand.

§. 49.

Da zwo gerade Linien keinen Raum allenthalben einzuschließen vermögen, sondern höchstens einen offenen Winkel bilden können, so muß man zur Anlegung einer Flächenfigur wenigst drey solche Linien haben, um nämlich mit der dritten Linie den Winkel zu schließen.

§. 50.

§. 50.

So oft man eine Linie unter einer verschiedenen Richtung auf eine andere stoßen läßt, so viele Winkel oder Ecke erhält man auch. Von der Anzahl der Ecke nun bekommen die verschiedenen Gattungen der Flächenfiguren ihre Benennungen. Stossen drey Linien zusamm, so giebt es **Dreyecke**, bey vieren **Vierecke**, bey fünfen **Fünfecke** u. s. w. Die Linien selbst, welche diese Flächen begränzen, werden die **Seiten** derselben genennt.

§. 51.

Man mag bey Dreyecken auf die Winkel oder auf die Seiten Rücksicht nehmen, so erhält man in jedem Betracht dreyerley Klassen derselben. Schließt man einen **rechten Winkel**, so ist das Dreyeck **rechtwinklicht**. Schließt man einen **stumpfen Winkel**, so wird das Dreyeck **stumpfwinklicht**. Weiß man endlich einen spitzigen Winkel so zu schließen, daß die beyden übrigen Winkel auch spitzig werden, so erhält man ein **spitzwinklichtes** Dreyeck.

In Rücksicht der Seiten giebt es **gleichseitige**, **gleichschenklichte**, wo nämlich zwo Seiten einander gleich sind, und **ungleichseitige**.

§. 52.

Aufgabe. Ein gleichseitiges, ein gleichschenklichtes, und ein ungleichseitiges Dreyeck zu zeichnen.

Auflös.

Aufl. Zur Zeichnung eines gleichseitigen Dreyeckes wird nur eine Linie z. B. Fig. 15 das b gegeben. Man setzt den Handzirkel auf einen Endpunkt derselben hin, und eröffnet ihn bis zum andern Endpunkt. Mit dieser Oeffnung, die die gegebne Linie zum Maaße hat, beschreibt man aus den besagten Endpunkten ober- oder unterhalb Bögen, die sich durchkreutzen, und verbindet den Durchkreutzungspunkt mit den beyden Endpunkten durch gerade Linien, so ist die Foderung erfüllt.

Zur Zeichnung eines gleichschenklichten Dreyeckes giebt man zwo Linien, wie etwa Fig. 16 b und c, eine zur Grundlinie (basis), und die andere zu den Schenkeln, welche aber allemal größer, als die halbe Grundlinie seyn muß; weil sich selbe sonst nicht über die Grundlinie erheben könnten, sondern auf ihr liegen blieben. Man nimmt demnach die Länge des Schenkels mit dem Handzirkel auf, und beschreibt mit dieser Oeffnung aus den Endpunkten der Grundlinie über oder unter derselben Bögen, die sich irgendwo durchschneiden, und verfährt übrigens wie oben.

Will man ein ungleichseitiges Dreyeck verzeichnen, so muß man drey verschiedene Linien geben, wovon aber allemal wieder zwo zusammen, größer als die dritte seyn müßen. Eine von diesen nimmt man zur Grundlinie, und erwählt gemeiniglich die größte dazu. Mit einer andern von den übrigen zwoen wird über der Basis ein solcher Bogen beschrieben, daß man ihn aus dem andern Endpunkt mit der dritten gegebenen Linie durchschneiden könne. Wird nun die-

ser Durchschnittspunkt mit den beyden Endpunkten der Grundlinie durch neue Linien verbunden, so hat man das verlangte Dreyeck, wie aus Fig. 17 erhellet.

*) Exempel Ein Bauer besitzt drey Grundstücke, wovon jedes ein Dreyeck vorstellt. Sein Obstgarten ist gleichseitig, und es hält eine Seite 275′: der Acker von ihm ist gleichschenklicht, ein Schenkel hievon ist 844′, und die Basis 229′ groß: die Wiese endlich hat lauter ungleiche Seiten, und messen 528′, 654′ und 811′. Man bringe diese drey Grundstücke nach irgend einem verjüngten Maaßstabe zu Papier.

§. 53.

Die drey gegebnen Seiten eines Dreyeckes mögen zusammgesetzt werden, wie sie wollen, so entsteht allemal das nämliche Dreyeck. Um sich davon zu überzeugen, darf man nur alle möglichen Fälle der Zusammensetzung durchgehen.

Es bleibe Fig. 17 c als Grundlinie, aber a und b werden vertauscht, so daß man a rechts und b links daransetzt: In diesem Falle darf nur die Grundlinie völlig umgeschlagen werden, damit der Endpunkt o nach m, und der Endpunkt m nach o kömmt, so ist es eben soviel, als wenn ich das Dreyeck der erstern Zusammensetzung selbst umgewendet hätte. So wenig also das Dreyeck durch das Umwenden verändert wird; so wenig leidet es durch das Vertauschen der zwo Seiten a und b.

Es werde b die Grundlinie; man setze c links und a rechts daran. Wird nun im gegenwärtigen Fall das Dreyeck so lange gewendet, bis b horizontal liegt, so erhält man völlig das vorige Dreyeck.

Es bleibe b die Grundlinie, aber a komme links und c rechts daran zu liegen. — Man schlage b wieder um, daß m nach x und a nach m kömmt, so hat man die nämliche Zusammensetzung wie vorher. Eben so verhält sichs auch, wenn a als Grundlinie genommen wird. Es kann also allgemein behauptet werden, daß einerley Seiten auch einerley Dreyecke geben.

Von der Kongruenz der Dreyecke.

§. 54.

Zwey oder mehrere Dreyecke, auch andere Flächenfiguren nicht ausgenommen, sind **kongruent** (übereintreffend), wenn bey gehöriger Uebereinanderlegung derselben sich alles wechselseitig deckt. Solche Größen sind demnach einander vollkommen gleich und ähnlich.

§. 55.

Das Zeichen der Kongruenz ist $\overline{\underline{S}}$, wovon ein Bestandtheil die Gleichheit, das liegende S hingegen die Aehnlichkeit (Similitudinem) ausdrückt.

*) Die Lehre von der Kongruenz der Dreyecke ist von der größten Wichtigkeit; weil sie den Grund der ganzen Geometrie enthält. Sie kann daher Anfängern nicht genug empfohlen werden.

§. 56.

Zwey Dreyecke, wo man überall die nämlichen Seiten antrifft, sind kongruent; weil sich die Gränzen vollkommen einander decken, folglich auch die begränzten Flächen selbst.

§. 57.

Zwey Dreyecke, wo überall eine Seite und die daranstossenden Winkel gemeinschaftliches Maaß haben, sind kongruent; denn die Seite deckt die Seite, und die daranliegenden Winkelschenkel des einen Dreyeckes, die vom andern Dreyecke, und zwar bis zu ihrer Durchschneidung.

§. 58.

Zwey Dreyecke, wo überall irgend zwo Seiten und ihr Zwischenwinkel gemeinschaftliches Maaß haben, sind mehrmal kongruent. Denn der Winkel deckt den Winkel, und die Schenkel die Schenkel bis zu ihren Endpunkten. Von einem Endpunkt zum andern kann aber nur eine gerade Linie gezogen werden; folglich decken auch diese einander.

§. 59.

Da in jedem Dreyecke die Größe einer Seite, von der Größe des Gegenwinkels abhängt, oder auch umgekehrt, so stehen in kongruenten Dreyecken den gleichen Winkeln, auch gleiche Seiten entgegen; und wechselweise, gleiche Seiten haben gleiche Gegenwinkel. Wenn demnach Fig. 18 A und B kon-

gruente Dreyecke sind; wenn in selben die Seiten a und d gleiche Größen haben, so müßen auch die Winkel m und y gleich seyn; denn diese decken sich ebenfalls einander. Der Schluß gilt auch umgekehrt. Wenn man weiß, daß in zweyen kongruenten Dreyecken z. B. in A und B die Winkel x und s einander gleich sind, so darf man auch behaupten, daß ihre Gegenseiten b und g ebenfalls die nämliche Länge haben.

Anwendung der Dreyeckskongruenz bey leichten Aufgaben und Sätzen.

§. 60.

Aufgabe. Einen Winkel in zween gleiche Theile zu theilen.

Auflös. Man setze den Handzirkel in den Scheitel des Winkels ein, schneide jeden Schenkel mit der nämlichen Oeffnung durch, setze den Zirkel in diese Durchschnittspunkte ein, und beschreibe mit gleicher Oeffnung auswärts Bögen, die sich durchkreutzen, und verbinde den Scheitel mit diesem Durchkreutzungspunkte, so ist der Aufgabe ein Genüge geschehen.

B e w e i s.

Wenn man Fig. 19 die letztere Zirkelöffnung durch wirkliche Linien sichtbar macht, und sie an den Durchkreutzungspunkt zusammenführt, so entstehen wegen den nämlichen Linien überall zwo kongruente Dreyecke, wo den gleichen Zirkelöffnungen b c und

d c auch gleiche Winkel entgegen stehen, nämlich o und x, welches die beyden Theile des gegebenen Winkels sind.

*) Algebraische Stellung des Beweises.

Satz.

o = x

Beweis.

a b = a d

b c = d c

a c = a c

also △ a b c ≅ △ a d c

und weil b c = d c

so ist auch o = x.

§. 61.

Aufgabe. Eine gerade Linie in zween gleiche Theile zerschneiden.

Auflös. Man beschreibe über die gegebene Linie ein gleichschenklichtes Dreyeck, und theile den Winkel, den die beyden Schenkel bilden in zween gleiche Theile, so wird auch dabey die Linie gleich getheilt seyn.

Beweis.

Die Theilungslinie zerschneidet Fig. 20 das gleichschenklichte Dreyeck in zwey kongruente Dreyecke; weil überall zwo Seiten sammt dem Zwischenwinkel die nämlichen sind. Da nun den beyden gleichen Winkeln o und m, a c und c b als Seiten entgegen stehen, so müßen selbe nothwendig gleiche Länge haben.

*) Die

Die Algebra stellt das Gesagte so in Ordnung.

Satz.

a c = c b

Beweis.

a d = d b

d c = d c

o = m

---

also $\triangle$ a d c $\overset{S}{=}$ b c d und

weil o = m so ist auch

a c = c b.

§. 62.

Aus diesem Beweise fließt noch der Satz, daß in gleichschenklichten Dreyecken die Winkel an der Basis allmal gleich sind; denn beyde stehen der nämlichen Seite d c entgegen.

§. 63.

Weil man in gleichseitigen Dreyecken jede Seite für die Basis annehmen, und das Dreyeck als gleichschenklicht betrachten kann, so folgt noch ferner daraus, daß die Winkel in einem gleichseitigen Dreyecke alle einander gleich sind.

§. 64.

Aufgabe. Auf eine Linie einen Perpendikel aufrichten, oder einen rechten Winkel zeichnen.

Auflös.

Auflös. Ist der Punkt, wo das geschehen soll, in der Linie selbst; so setzt man den Handzirkel in selben ein, und schneidet zu beyden Seiten gleiche Stücke ab, errichtet auf selben ein gleichschenklichtes Dreyeck, so ist die Linie, die von der Spitze auf den Punkt hinabfällt ein Perpendickel, oder mit andern Worten, die Nebenwinkel, die diese Linie macht, sind gleich, und hält daher jeder 90°. Denn die beyden Dreyecke sind wegen Gleichheit der Seiten kongruent, und den gleichen Schenkeln stehen die bemeldten Winkel entgegen, folglich sind sie gleich, und hält jeder $\frac{180°}{2} = 90°$.

Wäre der Endpunkt gegeben, so müßte die Linie um ein Stück verlängert werden, um die nämliche Auflösung zu bewerkstelligen.

Befindet sich der Punkt über oder unter der Linie, so wird der Handzirkel wieder in den Punkt eingesetzt, und aus selbem die Linie zweymal durchschnitten. Errichtet man nun auf diesen Durchschnittspunkten ein gleichschenklichtes Dreyeck, und theilt den Winkel, den die beyden Schenkel bilden, in zween gleiche Theile, so fällt die Theilungslinie perpendikulär auf die gegebene Linie hin. Der Beweis ergiebt sich aus der Kongruenz der Dreyecke von selbst.

*) In Fällen, wo am Endpunkte einer Linie ein Perpendikel aufgerichtet werden soll, giebt es zwar bequemere Methoden, als die obige, und lassen sich auch auf die übrigen beyden Bedingungen anwenden: aber ihre Richtigkeit zu beweisen, müßten noch einige Sätze vorausgehen, die theils zu schwer, theils für unsern Zweck entbehrlich sind. Ich will sie also hier, außer dem Systeme dieser

klei-

kleinen Schrift, als ein Paar praktische Kunstgriffe anführen.

Erste Methode. Man setzt den Handzirkel außer der Linie irgendwo ein, doch so, daß der andere Schenkel zugleich den Endpunkt erreichen, und zugleich in Beschreibung der Peripherie die Linie auch auf der andern Seite schneiden könne; von diesem Durchschnitte aus ziehe man einen Diameter, und verbinde den andern Endpunkt desselben mit dem gegebenen Punkte, so steht diese Linie allemal perpendikulär auf der anderen. Fig. 21 ist gegenwärtige Anweisung versinnlichet, wo a den gegebenen Punkt bezeichnet.

Zweyte Methode. Die sich vielmehr bey Schlagung eines rechten Winkels auf dem Felde, als auf dem Papier gebrauchen läßt.

Man strecke die Meßkette auf jener Linie aus, worauf der Perpendikel gefällt werden soll. Nun werden 18 Ringe oder Schuhe von der Kette angezogen, und der letzte oder 18te Ring durch einen eingesteckten Pfahl oder Pflock in dem gegebenen Punkt befestigt. Darauf werden von dem Uebrigen 6 Schuhe rückwärts gezählt, und der 6te so, wie der erste Ring gleichfalls durch einen gemeinschaftlichen Pfahl in der Erde fest gemacht. Endlich wird der 10te Ring von den gemeldten 18 ergriffen und angezogen, so werden die angestreckten 10 Ringe allemal den Perpendikel ausmachen. Der Beweis für beyde Methoden ist in meiner größern Geometrie ausführlicher anzutreffen.

Von

Von den Vierecken und ihrer Verzeichnung.

§. 65.

Wenn zwo und zwo Seiten eines Vierecks miteinander parallel laufen, so heißt das Viereck ein Parallelogram; wenn nur ein Paar Seiten dieß thun, wird es ein Trapez, und, wenn gar nirgends Parallelismus herrscht, Trapetzoid genennt.

§. 66.

Man zählt vierley Arten von Parallelogramen, als Quadrate, Rechtecke, Rauten oder Rhomben und Rhomboiden.

Vier gleiche Seiten, und eben so viel rechte Winkel geben das Quadrat, wie Fig. 22. Zwo und zwo gleiche Gegenseiten, und lauter rechte Winkel das Rechteck Fig. 23. Vier gleiche Seiten mit zweenen und zweenen gleichen Gegenwinkeln den Rhombe Fig. 24. Zwey gleiche Paare sowohl von Gegenswinkeln als Gegenseiten den Rhomboid Fig. 25.

§. 67.

Aufgabe. Quadrate, Rechtecke, Rhomben und Rhomboiden zu zeichnen.

Auflös. Zu einem Quadrat wird nur eine Seite gegeben. Man errichtet auf einem der Endpunkte einen Perpendikel, der eben so hoch als die Seite ist, nimmt mit dem Handzirkel die Seite auf, um

dem

dem Perpendikel besagte Höhe geben zu können, und beschreibt aus dem obern Endpunkte dieses Perpendikels einen Bogen, der mit gleicher Oeffnung des Zirkels aus dem andern Endpunkte der Grundlinie durchschnitten werden kann, so schließen die Linien, vom Durchschnittspunkte an die Endpunkte, wo der Zirkel zur Beschreibung der Bögen eingesetzt war, hingezogen, das verlangte Quadrat.

Zur Verzeichnung eines Rechteckes werden zwo Linien erfodert. Eine, gemeiniglich die längere, dient zur Grundlinie, und die andere wird als Perpendikel an einem der Endpunkte aufgerichtet, von dessen obern Endpunkte man mit der längern Seite einen Bogen macht, der aus dem zweyten Endpunkte der Grundlinie mit der kürzern Seite durchkreutzt werden kann. Das übrige Geschäft ist wie beym Quadrat.

Zur Beschreibung einer Raute giebt man eine Seite und einen spitzigen oder stumpfen Winkel. Es wird demnach allererst der Winkel nach §. 33 gezeichnet, und die Schenkel so lang als die gegebne Seite gemacht. Aus den Endpunkten dieser Schenkel macht man mit einer Oeffnung des Zirkels, der die Seite zum Maaß hat, durchkreutzende Bögen, als wollte man den Winkel in zween gleiche Theile theilen, und ziehe zuletzt die Linien zusammen, so ist geschehen, was man verlangt.

Zur Anlegung eines Rhomboids braucht man zwo Seiten, und einen Winkel, welcher wieder spitzig oder stumpf seyn kann. Man setze die zwo verschiedenen Seiten unter diesen Winkel zusammen,

und

und beschreibe mit eben diesen Seiten aus der Schenkel Endpunkten durchkreuzende Bögen, doch so, daß die gleichen Seiten beym Zusammenziehen der Linien an den Durchkreuzungspunkt hin einander entgegen zu stehen kommen, so ist der Rhomboid fertig.

§. 68.

Aufgabe. Ein Trapez zu zeichnen.

Auflösung. Dazu braucht man die zwo Parallelseiten, eine dritte Seite und den Winkel, unter welchem diese letztere mit einer der Parallellinien zusammen gesetzt ist; das übrige bestimmt sich von selbst. Man ziehe demnach allererst eine gerade Linie, mache sie solang, als jene Parallellinie ist, an welche die dritte Seite unter den gegebenen Winkel gesetzt ist; setze die bemeldte Seite wirklich unter den verlangten Winkel daran, ziehe vom Endpunkte dieser letztern eine Parallellinie mit der erstern nach §. 42, mache sie so groß, als die gegebene Parallelseite, und schließe die Figur. Fig. 26 ist ein Entwurf hievon.

§. 69.

Aufgabe. Ein Trapezoid zu verzeichnen.

Auflös. Hier ist nothwendig, daß drey aneinander hängende Seiten, und die zween Winkel, die die mittlere Seite mit den äußern beyden macht, gegeben werden. Man setze also diese Stücke durch Hilfe des Transportärs zusammen, und schließe zuletzt die Figur. Einen Begriff hievon giebt Fig. 27.

*) Exem-

*) Exempel. Bey einem Landgebäude bildet der Grund des Hauses ein Quadrat, dessen Seite 46′ hält. Der Stall ist ein Rechteck, dessen zwo Seiten 78′ und 34′ messen. Die Miststätte gleicht einer Raute, wovon eine Seite 28′, und der spitzige Winkel 75° hält Der Hof zwischen Haus und Stall hat die Figur eines Rhomboids, wovon die längere Seite 82′, und die kürzere 63′ hält, der stumpfe Winkel ist 103°. Das daranstossende Wurzgärtchen macht einen Trapez, wo die zwey Parallelseiten 28′ und 35′ halten, die dritte Seite ist 19′, und macht mit der größern Parallellinie einen Winkel von 68°. Endlich ist der Krautgarten ein Trapezoid, wo drey aneinander stossende Seiten 44′, 49′ und 54′ halten; die mittlere, macht mit der ersten einen Winkel von 70°, und mit der letztern 115°. Man bringe alle diese Figuren im verjüngten Maasstabe zu Papier!

Von den Vielecken und ihrer Verzeichnung.

§. 70.

Unter der Benennung Vieleck (Polygon) versteht man jede geradlinichte Figur, die mehr als 4 Seiten oder Winkel hat. Man theilt die Vielecke in zwo einzige Klassen ab, nämlich in die regulären und irregulären. Jene haben lauter gleiche Seiten, und lassen sich in einen Zirkel so hineinbeschreiben,

daß

daß die Seiten Sehnen des Zirkels abgeben. Bey den irregulären geht dieß nicht an.

§. 71.

Aufgabe. Ein reguläres Polygon in einen Zirkel von gegebenen Radius zu beschreiben.

Auflös. Man beschreibe mit dem gegebenen Radius einen Zirkel, und mache diesen Radius auch irgendwo sichtbar. Man dividire die 360° der Peripherie durch die Anzahl der Seiten z. B. durch 9, die das Polygon bekommen soll, und setze mit Hilfe des Transportärs einen Winkel von so vielen Graden, als der Quotus auswirft, wie hier 40°, an den Mittelpunkt. Da nun die Schenkel Radiusse sind, so schneide man den Bogen, der zwischen den beyden Radiussen liegt, so oft von der Peripherie ab, als es angeht, und ziehe die Sehnen dazu, so ist das Polygon gemacht. Als Beyspiel dient Fig. 28.

*) Exempel. Es soll zu einem Festungsthurm ein achteckichter Grund gegraben werden, so, daß der Radius des Polygons 18′ bekömmt; man soll durch Zeichnung die Länge einer Seite finden.

§. 72.

Aufgabe. Ein irreguläres Polygon zu zeichnen.

Auflös. Dazu müßen alle Seiten, bis auf eine, die die Schlußseite heißt, gegeben werden; auch alle Winkel, und zwar, wie sie der Ordnung nachfolgen. Die letzten Winkel, die auf der Schlußseite

seite liegen, sind nicht nothwendig. Man verfährt daher bey der Zeichnung wie beym Trapezoid, bis alle Seiten unter ihren Winkeln aneinander gesetzt sind. Fig. 29 versinnlicht das Gesagte.

*) Exempel. Ein Förster auf dem Lande schickt von seiner Ausmessung eines Waldes folgende Anzeige zum Forstamt hieher: „Das ganze Gehölz ist ein Sieben eck; die erste „Seite, wo ich zu messen angefangen, hält 2440', die nächste daran 1910', der Winkel dazwischen 127°. Nachher „folgen die Winkel und Seiten so auf einander: Winkel „109°, Seite 1592', Winkel 73°, Seite 920', Winkel 123°, „Seite 1087', Winkel 89°, Seite 792. Die letzte Seite „ist sumpficht, und konnte daher nicht wohl gemessen wer„den." Nun ist die Frage, ob sich aus diesen gegebenen Stücken der Plan des Gehölzes zeichnen lasse, und wie groß im bejahenden Falle die letzte Seite ausfalle?

Bestimmung der Winkel in den bis daher abgehandelten Flächenfiguren.

§. 73.

In jedem Dreyecke halten alle drey Winkel zusammen 180°. Praktisch ist zwar der Beweis dieses Satzes nicht mathematisch streng, aber sinnlich überzeugend. Man bestimme mit gleicher Oeffnung des Zirkels das Maaß jedes der 3 Winkel durch einen Bogen aus dessen Scheitelpunkt; beschreibe mit der nämlichen Oeffnung irgendwo auf einer Linie eine halbe Peripherie, das ist 180°, und schneide diese 3 Bögen

davon ab, so wird man sehen, daß sie allemal mit einander die halbe Peripherie ausmachen. Fig. 30 ist dieß anschaulich gemacht, wo der Bogen h k = a b, k l = c d und l p = f g ist.

*) Die algebraische Beweisführung geht so vor sich. Man bezeichne die Winkel des Dreyeckes durch Buchstaben, so heißt der

Satz

Fig. 31. $m + x + s = 180°$.

Beweis.

Es werde durch den Scheitelpunkt irgend eines Winkels eine Linie mit der Gegenseite parallel gezogen, so entstehen die Wechselwinkel

$$z = m$$

und $$y = s$$

Da nun $z + x + y = 180°$ als Nebenwinkel nach §. 34.

Substituiert $m + x + s = 180°$.

§. 74.

Weil nach §. 63 alle Winkel in gleichseitigen Dreyecken einander gleich sind, so ist das Maaß eines solchen Winkels $\frac{180°}{3} = 60°$.

§. 75.

Wenn in gleichschenklichten Dreyecken ein Winkel gegeben ist, so sind alle drey bekannt. Denn ist der am Scheitel gegeben, so darf er nur von 180° abgezogen werden, der Rest muß anzeigen, wie viel die beyden Winkel an der Grundlinie betragen. Weil aber diese nach §. 62 einander gleich sind,

so

so hält einer die Hälfte vom Rest. — Ist ein Winkel an der Grundlinie bekannt, so ist es auch der andere: diese beyden von 180° abgezogen, bleibt der Winkel am Scheitel.

Es halte z. B. ein Winkel an der Grundlinie 67° 40′, folglich hält der andere ebenfalls 67° 40′ diese zusamm addirt

67 40
67 40

135° 20′ und

von 180 abgezogen
135 20

so bleibt 44° 40′ für den dritten Winkel.

Es halte im erstern der Winkel am Scheitel 19° 32′ so muß dieß von 180° abgezogen, und der Rest halbirt werden

180
19 32

160 28
:2 80° 14′ beträgt ein Winkel an der Basis.

§. 76.

Eben so begreiflich ist es auch, daß, wenn in was immer für einem Dreyecke zween Winkel gegeben sind, der dritte gleichfalls bekannt seyn müße. Es betrage z. B. einer 27° 36′ und der andere 58° 9′ daher die Rechnung:

30

27 36
58 9
85 45

180
85 45
94° 15′ die Größe des dritten Winkels.

*) Exempel 1) Man habe zwey gleichschenklichte Dreyecke. In einem halte der Winkel am Scheitel 43° 17′, im andern einer an der Grundlinie 67° 38′; wie groß sind die andern Winkel?

2) In einem ungleichseitigen Dreyecke mißt ein Winkel 22° 42′, ein anderer 65° 52′; wie groß ist der dritte?

§. 77.

Die Winkel im jedem Vierecke, es mag ein Parallelogram seyn oder nicht, halten zusamm genommen 360°. Denn wenn man durch die Figur von einem Eck zum andern eine gerade Linie zieht, (man nennt sie Diagonallinie) so entstehen allemal zwey Dreyecke, wovon eines 180° beträgt: 2 × 180 ist aber = 360°.

*) Die Algebra beweißt dieß so:

Satz. Fig. 31.

$m+x+y+s=360°$

Beweis.

$m+o+n=180°$

$r+z+s=180$

---

add. $m+o+r+z+n+s=360°$

abr

aber $o + r = x$
$n + z = y$
} Denn das Ganze ist seinen Theilen gleich.

subst. $m + x + y + s = 360°$.

§. 78.

Wenn in einem Rhombe oder Rhomboide ein Winkel bekannt ist, so sind es alle viere. Denn der gegenüberstehende ist nach §. 66. eben so groß. Diese zusammaddirt, die Summe von 360° abgezogen und den Rest halbirt, so entstehen die andern zween Winkel 85° 13′; da nun der Gegenwinkel gleiches Maaß hat, so gilt die Rechnung:

85	13
85	13
170	26

360	
170	26
189	34

:2 94° 47′, das Maaß eines jeden von den andern beyden Winkeln.

*) Exempel. In einer Raute hält ein Winkel 38° 33′, wie groß sind die andern drey Winkel insonderheit?

Noch einige nothwendigen Bemerkungen über die Flächenfiguren.

§. 79.

Jedes Parallelogram kann durch eine Diagonallinie §. 77. in zwey kongruente Dreyecke zertheilt werden. Denn die Seiten dieser Dreyecke sind die nämlichen; weil die Gegenseiten in Parallelogrammen §. 67. einander gleich seyn müßen, und die Diagonallinie zu jeden der beyden Dreyecke gehört.

*) Mit Buchstaben stellt sich der Beweis dem Auge in Kürze wieder so dar

Fig. 33. Satz.

$\Delta abc \cong \Delta acd$

Beweis.

$ad = bc$
$ab = dc$ } als Gegenseiten
$ac = ac$

---

also $\Delta abc \cong \Delta acd$.

§. 80.

Es kann daher auch wechselweise jedes Dreyeck zu einem Parallelogram ergänzt werden, welches noch so groß als das Dreyeck selbst ist. Denn man darf nur eine der drey Seiten als Diagonallinie ansehen und zu jeden der beyden übrigen eine Parallellinie ziehen, die sich wieder zu einem Dreyecke schliessen. Fig. 34. macht dieß, nöthigen Falles, begreiflich, wo abc das ursprüngliche Dreyeck vorstellt.

§. 81.

§. 81.

Die Höhe eines Dreyeckes kann verschieden gemessen werden, je nachdem man eine der drey Seiten zur Grundlinie (Basis) annimmt. Meist erwählt man die dazu, welche horizontal liegt, das heißt, die mit unserm Horizonte parallel läuft, oder die auf einer Horizontalfläche uns am nächsten liegt. Wenn man man nun auf besagte Grundlinie, oder auf die Richtung desselben vom Gegenwinkel einen Perpendikel herabfällt, so ist dieser Perpendikel die Höhe des Dreyecks. So ist z. B. Fig. 35. die Höhe der Perpendikel a d auf die Grundlinie b c selbst: Fig. 36. aber der Perpendikl d h auf der Richtung der Grundlinie, weil es sich anders nicht thun läßt.

§. 82.

Auch bey Parallelogramen bleibt es willkührlich, welche Seite man als Grundlinie gelten lassen will: doch fällt die Wahl meistentheils so aus, wie gerade oberhalb von den Dreyecken bemerkt worden. Die Höhe bey dieser Art Flächenfiguren ist allemal die Parallelweite zwischen der Grundlinie und der Gegenseite, z. B. Fig. 37. der Perpendikel a b oder c d.

§. 83.

Trapezen haben gleichfalls die Distanz der darinn vorkommenden Parallellinien zur Höhe. Reguläre Polygone (Vielecke) erkennen den Perpendikel von Mittelpunkt aus auf eine Seite hingezogen als ihre Höhe. Bey Trapezoiden und irregulären Vielecken hingegen gehört die Höhe unter die Undinge.

§. 84.

§. 84.

Aufg. In jeder Flächenfigur, wo eine Höhe üblich ist, dieselbe durch eine Linie sichtbar zu machen.

Auflös. Da die Höhe allemal ein Perpendikel seyn muß, so darf bloß das angewendet werden, was § 64. von Errichtung der Perpendikel gelehrt worden.

§. 85.

Jedes schiefwinklichte Parallelogram, dergleichen die Rauten und Rhomboiden sind, ist so groß als ein Rechteck, das gleiche Grundlinie und Höhe mit selben hat; oder mit andern Worten: Jedes schiefwinklichte Parellogram kann in ein Rechteck verwandelt werden, ohne das Höhe und Grundlinie dabey leidet.

Man nehme z. B. Fig. 38. das Parallelogram abcd vor die Hand. Wenn nun der Perpendikel af gezogen, bc bis g verlängert, und auch dg perpendikulär herabgefällt wird; so ist das neuentstandene Rechteck adgf eben so groß als das vorige schiefe Parallelogram: denn was durch das Dreyeck abf davon hinweg gekommen, dieß ist anderseits durch das hinzugekommene Dreyeck deg ersetzt worden. Daß aber die beyden Dreyecke einander gleich sind, wird so erwiesen: die Seite af ist so groß als dg; weil beyde Linien die Parallelweite vorstellen. Ferner ist ab so groß als dc, nach der Zeichnung eines Parallelograms. Bey f und

g sind

g sind rechte Winkel wegen den Perpendikeln. Die Winkel bey b und c sind ebenfalls gleich als innerer und äußerer Winkel der Parallellinien ab und dc, die von der Linie bg durchschnitten worden §. 47. Was nun in jedem Dreyecke noch an 180° abgeht, müßen die spitzigen Winkel bey d und a halten, und eben deswegen auch einander gleich seyn. Folglich hat man in jedem der zwey Dreyecke zwo Seiten und den Zwischenwinkel gleiches Maaßes, und dieß beweiset nach §. 58., daß die beyden Dreyecke kongruent sind.

§. 86.

Da es nun ausgemacht ist, daß schiefwinklichten und rechtwinklichten Parallelogramen von gleicher Grundlinie und Höhe einerley Inhalt zukömmt, so muß dieß auch von schiefwinklichten und rechtwinklichten Dreyecken gelten, die gleich große Basis und Perpendikel haben. Denn jedes Dreyeck läßt sich zu einem doppelt so großen Parallelogram von der nämlichen Höhe und Basis ergänzen. Da nun diese Figuren den nämlichen Inhalt haben, wie oben erwiesen worden, so sind auch nothwendig die halben Figuren, das ist, die Dreyecke §. 79. von gleichem Inhalte.

§. 87.

Zwey oder mehrere Dreyecke von einerley Höhe, die Grundlinien mögen seyn, wie sie wollen, lassen sich in ein einziges Dreyeck verwandlen. Denn man ziehe eine Horizontallinie von unbestimmter Länge, errichte am Ende (oder auch irgendwo in

der

der Mitte) derselben den gemeinschaftlichen Perpendikel, schneide nach und nach sämmtliche Grundlinien von der Horizontallinie ab, und vereinige den letzten Endpunkt (wenn der Perpendikel in der Mitte ist, die beyden Endpunkte) mit dem obersten Punkt des Perpendikels durch eine Linie, so ist das Geschäft fertig. So hat z. B. Fig. 40. das Dreyeck lpm die nämliche Größe wie Fig. 39. das Dreyeck abd; weil lp=ac und pm=bd ist. Das nämliche ist aus gleichen Gründen auch von den Dreyecken lmn und gfk wahr. Folglich muß nothwendig das ganze Dreyeck lpn den beyden Dreyecken abd und fgk zusammgenommen gleich seyn.

§. 88

Da jedes Trapetz durch eine Diagonallinie in zwey Dreyecke zerschnitten werden kann, welche Dreyecke die Parallellinien zu Grundlinien und die Parallelweite zur gemeinschaftlichen Höhe haben, so erhellet, daß man jedes Trapetz in ein Dreyeck verwandeln könne; oder mit andern Worten: daß jedes Trapetz einem Dreyecke gleich sey, dessen Grundlinie so groß ist, als die beyden Parallellinien zusammen genommen, und dessen Höhe die Parallelweite vorstellt.

Daraus wird auch begreiflich, wie ein reguläres Polygon in ein Dreyeck verwandelt werden könne. Denn es läßt sich allemal durch Radiusse in so viele Dreyecke von einerley Höhe und Grundlinie zerschneiden, als viele Seiten es zählt: man ist aber im Stande, wie eben gelehrt worden, alle diese Dreyecke in ein einziges zu bringen.

Es

Es ist daher jedes reguläre Vieleck einem Dreyecke von der nämlichen Höhe gleich, dessen Grundlinie aus allen Seiten des Vielecks zusammengesetzt worden.

§. 89.

Je mehrseitiger ein Polygon im nämlichen Zirkel gemacht wird, desto näher kommen alle Seiten mit der Peripherie überein, und desto näher kömmt die Höhe des Polygons an Länge dem Radius des Zirkels. Es sind demnach ein Zirkel und ein in selben hineinbeschriebenes Polygon von unendlich vielen Seiten völlig einerley. Folglich gleicht auch der Zirkel einem Dreyecke, dessen Grundlinie die Peripherie und dessen Höhe der Radius ist; weil sich alle regulären Polygone in Dreyecke von besagter Eigenschaft verwandeln lassen.

§. 90.

Man hat durch eine sehr mühsame Rechnung gefunden, daß, wenn der Diameter eines Zirkels genau einen Schuh hält, die Peripherie in geradausgestreckter Linie allernächstens $3\frac{1}{7}$ Schuhe halte. Ist der Diameter 1 Zoll groß, so beträgt die Peripherie $3\frac{1}{7}$ Zolle. Hält der Diameter eine Meile, so gehen auf die Peripherie $3\frac{1}{7}$ Meile u. s. f. Man kann daher allemal durch die Regeldetri oder durch den reesischen Ansatz aus dem gegebenen Diameter eines Zirkels die Peripherie desselben bestimmen. Wechselsweise ist man auch im Stande aus der Peripherie den Durchmesser zu berechnen. Es sey z. B. der Durchmesser eines Zirkels 18 Schuh, so wird

die

die Peripherie durch folgende kleine Rechnung gefunden:

Periph. Sch. ?	18	Sch. Diam.
Diam. Sch. 1	$3\frac{1}{7}$	Sch. Periph.
7	22	
	36.	
	36	
	44	
	396 $\frac{1}{7}$	$56\frac{4}{7}$ Schuhe.
	77	

*) Exempel. 1) Ein Kutschenrad hält $6\frac{1}{2}$ Schuh im Diameter, wie lang muß die Radschine dazu seyn?

2) Der Diameter der Erdkugel wurde 1720 geographische Meilen groß befunden; wie groß ist der Aequator oder der Mittagskreis?

3) Eine Kirche wird rund gebaut und hat zum Diameter 86 Schuh, wie lang muß eine kupferne Dachrinne werden, die sie umgiebt?

4) Um eine rund gebaute Stadt braucht jemand $1\frac{3}{4}$ Stund herum zu kommen; wie lange wird er durch die Mitte derselben brauchen?

Von

Von Berechnung der geradlinichten Figuren und des Zirkels, in Rücksicht ihres Flächeninhalts.

§. 91.

Keine Figur ist leichter zu berechnen als das Rechteck. Man darf hier nur die Grundlinie mit der Höhe multiplicieren, so ist alles gethan. Die Ursache ist diese: die Länge der Grundlinie zeigt an, wie viel Quadratschuhe der Reihe nach auf selber liegen können; und Höhe oder Breite sagt mir, wie viel solcher Reihen von Quadratschuhen in der Figur enthalten sind. — Z. B. ein viereckichter Tisch sey 7 Fuß lang und 4 breit: Man will ihn mit Papier überdecken, wo jeder Bogen, setzen wir, genau einen Quadratschuh hält. Es werden sich daher 7 solcher Bögen zunächst an einem Rande der Länge nach auflegen lassen, und diese Reihe von Quadratbögen wird man 4mal wiederholen können. Folglich $7 \times 4 = 28$ Quadratschuhe.

Zum Ueberflusse soll hier eine berechnete Aufgabe die Sache noch mehr ins Licht stellen. Ein viereckichter Acker ist 948′ lang und 720′ breit, wie viel hält er bairische Morgen oder Joucharte, oder auch Tagwerke, welche drey Benennungen das Nämliche sagen, einen Morgen zu 40000 Quadratschuhe gerechnet?

Berechnung.

948
720

1896
6636

z

682560 | 1 17 Morgen u. 2560 Quadratsch.
440000

§. 92.

Da Quadratflächen nach §. 66. eben so lang als breit sind, und die Seiten perpendikulär auf einander stehen, so darf bey Berechnung derselben nur eine Seite mit sich selbst multiplicirt werden, und das ganze Geschäft ist damit geendet. Ein einziges Beyspiel hierüber! Ein großer Lustgarten ist ins Quadrat angelegt, und hält eine Seite 1376'; wie viel Morgen Landes nimmt er ein?

Berechnung.

1376
1376

8256
9632
4128
1376

z r

1893376 | 1 47 Morg. u. 1376 Quad. Sch.
440000

§. 93.

§. 93.

Schiefe Parallelograme, worunter Rhomben und Rhomboiden verstanden werden, sind nach §. 85. genau so groß, als Rtchtecke von einerley Grundlinie und Höhe. Es ist daher ganz einerley, ob man diese Parallelograme selbst, oder aber ihre Aequivalente (gleichgiltige Figuren) berechnen will. Folglich ist der Inhalt eines jeden Parallelograms das Produkt aus der Grundlinie in die Höhe. Die Höhe ist aber allemal der Perpendikel zwischen der Grundlinie und der Gegenseite. Es halte z. B. die Grundlinie einer Rhomboide 89′ und der Perpendikel $17\frac{1}{2}$; wie groß ist der Fächeninhalt?

Berechnung.

89

35

445

267

X (I | 1557½ Quadratschuhe.
ZXXS |
ZZZZ

*) 1) Exempel. Eine Heerstrasse, die 18′ breit ist, soll durch einen Acker geführt werden. Wie viel Quadratschuhe müßen dem Eigenthümer vergütet werden, wenn die Länge der Strasse durch diesen seinen Acker 217′ beträgt?

2) Der Boden irgend eines Saals stellt ein Quadrat vor, und soll mit viereckichten Marmorplatten ausgepflastert

stert werden. Die Länge oder Breite des Saals ist 96′ groß; und die Länge oder Breite einer Marmorplatte mißt 16 Duodecimalzolle; wie viel braucht man solche Marmorplatten?

3) Ein Blumenbeet (Rabatte) stellt eine Rhomboide vor; die Grundlinie ist 136′ und der darauf gefällte Perpendikel $23\frac{3}{4}$′; wie groß ist dessen Fläche?

§. 94.

Weil Dreyecke Hälften von Parallelogramen sind, die einerley Grundlinie und Höhe mit ihnen haben; so findet man ihren Inhalt, wenn entweder das Produkt aus der Grundlinie und Höhe durch 2 dividirt, oder wenn einer von diesen Faktoren mit der Hälfte des andern multipliciret wird. Z B. Ein Dreyeck hat zur Basis 320′ und zur Höhe 148′; wie groß ist der Quadratinhalt desselben?

Berechnung.

148
320

296
444
---
xx
47360 $\frac{1}{1}$ 23980 Quadratschuhe.
2222

Oder

Oder:

2
320 | 160 148
22 | 160

888
148

23680

Oder auch:

148 | 74
22 | 320

148
222

23680 Quadratschuh.

*) Exempel. Ein Anger ist dreyeckicht: die Grundlinie mißt 431′ und der Perpendikel auf selber 274′; wie viele Tagwerke enthält dieser Anger?

§. 95.

Es ist §. 88. gezeigt worden, das jedes Trapetz einem Dreyeck gleiche, dessen Grundlinie die Größe der beyden Parallellinien zusamm genommen hat, und dessen Höhe die Parallelweite ist. Folglich darf man nur, um den Inhalt eines Trapetzes zu bekommen, die Parallelseiten zusamm addiren, und die Summe wie die Basis eines Dreyeckes

behan-

behandeln. Es seyen z. B. in einem die Parallelseiten $28\frac{1}{2}'$ und $33'$ dann die Parallelweite $17\frac{1}{4}'$; wie groß ist der Inhalt?

Berechnung.

$28\frac{1}{2}$

33

$61\frac{1}{2}$

123

2

$17\frac{1}{4}$

69

4

123
66
1107
378
4887 .

$4887 \frac{1}{1} 305\frac{7}{16}$ Quad. Ech.
16
48
-87
16
80
7

*) Exempel. Der Grund eines Hauses ist ein Trapez. Die Seiten, welche unter sich parallel laufen, $63'$ und $58\frac{2}{3}'$: ihre Entfernung aber von einander beträgt $37\frac{3}{4}'$; was mißt diese Fläche?

§. 96.

In dem eben angeführten §. wurde auch gelehret, daß jedes reguläre Vieleck gleichfalls einem Dreyecke von der nämlichen Höhe gleich sey, dessen Grundlinie so groß ist, als alle Seiten des Vielecks zusamm genommen. Daher erhält man den Flächeninhalt eines solchen Polygons, wenn man eine Seite mit ihrer Anzahl, und dann auch mit der halben Höhe multiplicirt. Multipliciret man aber mit der ganzen Höhe, so muß das Produkt am Ende halbiret werden.

Es habe z. B. ein reguläres Polygon 8 Seiten, und jede sey 17′ groß. Der Perpendikel betrage $11\frac{1}{6}$′; wie groß ist dessen Fläche?

Berechnung.

17
8
136
67
952
816
9112
12
84
71
12
60
112
12
108
4

$\frac{4}{1}$

$\frac{1}{1}$

$11\frac{1}{6}$
67

$759\frac{1}{3}$ Quadratsch.

*) Exempel. 1) Die Grundfläche des chinesischen Thurmes im englischen Garten allhier ist ein reguläres Zwölfeck, wovon eine Seite $14\frac{1}{2}'$ und die Höhe, oder der Perpendikel vom Mittelpunkt des Polygons aus, auf eine Seite hingefällt, $27'$ beträgt. Wie viele Quadratschuhe nimmt diese Fläche ein?

2) Der Grund eines Sommerschloßes ist ein Sechseck, das zur Seite $20\frac{1}{2}'$ hat, und die Polygonhöhe $29\frac{3}{4}'$ beträgt; wie groß ist der Flächeninhalt dieses Grundes?

§. 97.

Es ist ferner nach §. 80. ausgemacht. daß auch jeder Zirkel einem Dreyecke gleiche, dessen Grundlinie so groß als die Peripherie und die Höhe der Radius ist. Daher muß diese Flächenfigur gleichfalls nach dem Gesetzen der Dreyecke berechnet werden. Nur ist nothwendig, das man vorher aus dem gegebenen Diameter die Peripherie, oder wechselweise, aus der Peripherie den Diameter nach §. 90. bestimme. Hierist ein Beyspiel. Ein Zirkel hat zum Diameter $35'$, wie groß ist dessen Fläche?

Berechnung.

Periph. Sh.?

	35 Sch. Diam.
1	$3\frac{1}{7}$ Sch. Periph.
7	22
	5
	110 Schuh Periph.

35

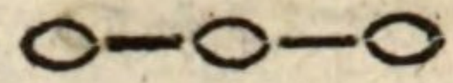
35
110
35
35
21(2 2
385 0 1 962½ Quadratschuhe.
444 1

Exempel. 1) Der runde Tanzplatz im englischen Garten neben dem chinesischen Hause, welcher im Durchmesser $37\frac{1}{2}'$ hält, soll mit Brettern, eines zu 24 Quadratschuhe, ausgelegt verden; wie viel braucht man dazu?

2) Wie viel solcher Bretter fodert die runde Ebene im dasigen Amphitheater, dessen Diameter 94′ mißt?

§. 98.

Trapezoiden und irreguläre Polygone können nicht wohl eher berechnet werden, als bis sie durch Diagonallinien zuvor nach Willkühr in Dreyeck zerschnitten, und in selben die Höhe gezogen worden. Man mißt und berechnet dann jedes Dreyeck besonders, und addirt am Ende alles zusammen, so hat man den Betrag derselben. Ein Beyspiel hierüber! Ein Fünfeck giebt durch Diagonallien 3 Dreyecke. Im Dreyeck A mißt die Grundlinie 166′ und der Perpendikel $73\frac{1}{2}'$ im Dreyeck B die Grundlinie 217, die Höhe $114\frac{3}{4}'$ und im Dreyeck C die Grundlinie 37′ und die Höhe $22\frac{1}{3}'$; wie groß ist dieses Fünfeck?



A

166
147 — $73\frac{1}{2}$

1162 — 147
664
166

24402 | 6100$\frac{1}{2}$ Quadratschuh.
4444

B

217 — $114\frac{3}{4}$

459
217

3218
459
918

134
99603 | 12450$\frac{3}{8}$ Quadratschuh
88888 | 1

C

37 — $22\frac{1}{3}$

67
37

469
201

41
2479 | 413$\frac{1}{6}$ Quadratschuh.
666

6100$\frac{1}{2}$

$6100\frac{1}{2}$
$12450\frac{3}{8}$
$413\frac{1}{3}$

Antw. $18964\frac{1}{24}$ Quad. Sch.

$\frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}$
48
36
16 3 2
100 | $1\frac{1}{24}$
90 |
4

*) Exempel. Eine Viehweide ist ein irreguläres Siebeneck und gtebt folgende 5 Dreyecke:

A	hat zur Grundlinie	$37\frac{1}{4}'$	und zur Höhe	$134\frac{1}{2}'$
B	—	—	$84\frac{2}{3}'$	—	$14'$
C	—	—	$219\frac{1}{2}$	—	$50'$
D	—	—	$184\frac{1}{6}$	—	$95\frac{2}{4}$
E	—	—	75	—	$28\frac{1}{2}$

Was beträgt der ganze Inhalt?

Anwendung der bisherigen Sätze auf das eigentliche Feldmessen.

§. 99.

Unter Feldmessen versteht man theils die Bestimmung von Weiten, besonders solcher, die sich wegen Hindernissen gerade zu nicht messen lassen; theils die Berechnung des Flächeninhalts größerer Reviere, wie auch die Vertheilung desselben; theils und vornehmlich die Verjüngung oder Aufnehmung eines Distriktes z. B. eines Waldes einer Flur u. d. gl. Wir sind im Stande, in allen diese Gattungen des Feldmessens etwas weniges und brauchbares aus den vorhergehenden Sätzen zu leisten.

§. 100.

§. 100.

Aufgabe. Eine mäßige Weite, die so beschaffen ist, daß dessen Messung von einem Endpunkt zum andern unmöglich wird, setzen wir es befinde sich dazwischen ein Weiher, Dickicht u. d. gl.; aber sich irgendwo ein Punkt finden läßt, von welchem aus man zu beyden messen kann, 1) ohne Meßtisch, sondern bloß mit Absteckstäben 2) mit Hilfe des Meßtisches zu bestimmen.

Erste Auflösung ohne Meßtisch.

Es seyen z. B. Fig. 41. x und y die beyden Oerter, dessen Entfernung voneinander gemessen werden soll, zwischen welchen sich aber ein Teich befindet. Man suche demnach einen dritten Ort, der wenn es möglich ist, die Beschaffenheit hat, daß man erstens zu beyden Oertern sowohl sehen, als auch mit der Kette messen könne, zweytens, daß man auch diese gemessenen Linien, wo nicht um die ganze Länge derselben, doch um ihre Hälfte oder um einen Theil derselben verlängern könne. In unsrer Figur ist der Punkt c dazu gewählt worden.

Man befestiget in selbem eine Fahne oder auch einen Stab, mißt dann von selben nach x und trägt die ganze Länge nach a oder die Hälfte nach f. Das nämliche nimmt man auch mit der Linie cy vor, und macht die Endpunkte a und b durch eingesteckte Stäbe sichtbar. Die Entfernung ba, welche, wie ich voraus setze, gemessen werden kann, ist so groß als die eigentliche Entfernung. Denn die Dreyecke cxy und abc sind nach §. 58. kongruent,

weil

weil m und n Vertikalwinkel sind, ferner ac so groß ist als cx und bc so groß als cy. Folglich sind auch nach §. 69. die den Vertikalwinkel m und n entgegenstehenden Seiten ab und xy einander gleich.

Lassen sich die Linien cx und cy nicht ganz fort tragen, so verlängere man sie überall um einen beliebigen Theil, z. B. überall um den dritten Theil oder dgl. und messe die Entfernung der beyden Endpunkte, so wird dieß ebenfalls der dritte Theil der ganzen Entfernung xy seyn. Der Beweis fließt aus der Analogie. Denn verlängert man die Linien um ihr ganzes Maaß, so kömmt durch die Schlußlinie die Entfernung ganz heraus. Wenn man sie demnach um einen Theil verlängert so muß die Schlußlinie natürlich auch diesen Theil der Entfernung geben. Sollten sich allenfalls die Linien gar nicht verlängern lassen, so können die Hälften oder die dritten Theile u. dgl. auch rückwärts, wie in der Figur h und g gemessen werden. Der Beweis ist der nämliche, daß gh Fig. 41. ebenfalls wieder ein solcher Theil von der verlangten Entfernung sey. Denn man darf sich das Dreyeck gch nur doppelt auf einanderliegend vorstellen. Wenn man nun nur das obere bey gh aufhebt, und völlig umschlägt, so ist cdf daraus geworden, und liegt gh auf df, von welchem df es aber gerade oberhalb erwiesen worden, daß es der nämliche Theil der Entfernung sey, um welchen Theil die Linie xc oder yc verlängert worden.

Zwey-

Zweyte Auflösung, mit dem Meßtisch.

Man suche einen Standpunkt von der nämlichen Beschaffenheit, wie in der erstern Auflösung ohne Meßtischchen; das heißt, von wo aus man zu beyden Oertern sowohl mit der Kette messen als mit der Alhidade visiren könne. Nur braucht in diesem Fall keine Linie verlängert zu werden. Ueber diesen Punkt setze man den Meßtisch, der mit weißem Papiere überzogen seyn muß, visire nach einem oder beyden Oertern, und ziehe mit einem feinen Bleystift eine Linie längs der Alhidade von unbestimmter Größe. Das Nämliche geschieht auch beym andern Orte, doch so, daß die beyden Linien irgendwo in der Mitte oder am vordern Theil des Meßtisches einen Winkel bilden, oder, was eines ist, sich einander durchschnriden. Wenn nun indeß die beyen Entfernungen mit der Kette gemessen worden, so schneide man sie im verjüngten Maaße aus dem Scheitel des besagten Winkels ab. Die Schlußlinie ist im nämlich verjüngten Maaße die verlangte Weite. In Fig. 42. ist dieß in etwas anschaulich gemacht.

Beweis.

Je länger man auf dem Meßtische die Linien ab und ac macht, desto länger wird auch die Schlußlinie bc ausfallen: so zwar, daß wenn der Tisch so groß wäre, daß man die Linien ax und ay ganz auftragen könnte, so würde auch die Schlußlinie der ganzen Weite gleichen; weil der Winkel bey a beeyden Dreyecken, dem auf dem Felde und dem auf den Meßtische, gemein ist, folglich wäre

Kon-

Kongruenz der Dreyecke da. Da man nun ab und ac z. B. 4000mal kleiner macht als ax und ay sind, denn daß heißt verjüngen, so muß auch natürlich bc der 4000enste Theil von xy werden, oder mit andern Worten, so muß bc das xy im verjüngten Maaße seyn.

§. 101.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter finden, die so beschaffen sind, daß man von einem dritten Orte zwar zu beyden sehen, aber nur zu einem messen kann.

Auflös. Es ließe sich dieß zwar auch ohne Meßtisch, bloß mit Absteckstäbe, leisten, wie in meinem gräßern Werke praktische Geometrie §. 17. weitläuftig gezeigt worden. Allein die Sache scheint mir für Leser dieser Art zu schwer zu seyn. Wir wollen daher sogleich zum Meßtisch unsre Zuflucht nehmen.

Man suche sich einen solchen Standpunkt, wie in der Aufgabe bedungen worden, stelle den Meßtisch darüber und verfahre wie oben, außer daß man nur einen Schenkel in verjüngten Maaße messen und bestimmen kann; denn der andere Schenkel wird unbestimmt gezogen. Nun trage man den Meßtisch nach dem zugänglichen Orte und stelle ihn so, daß der Abschnittspunkt so viel möglich über denselben zu stehen kömmt. Dann lege man die Alhidade an die abgeschnittene Linie, und drehe den Tisch mit unverrückter Alhidade so lange, bis man den vorigen Standpunkt, der bey Wegtragung

gung des Meßtischchens durch eine eingesenkte Fahne sichtbar gemacht worden, erblickt. Nun wird der Tisch fest geschraubt, und die Alhidade so lange um den Abschnittspunkt fortbewegt, bis man auch das unzugängliche Ort ins Aug gebracht. Jetzt wird dann längs der Alhidade eine Linie gezogen, welche den vorigen Winkel zum Dreyecke schließt, und zugleich die verlangte Entfernung im verjüngten Maaße zeigt.

Beweis.

Von der Größe der Linie ab, Fig. 43. auf dem Meßtische hängt auch die Größe der Linie cb auf selber ab. Wäre ab so groß als die Sandlinie (so wird allemal die Linie zwischen zwey Aufstellungen des Meßtisches genennt) so mußte auch ac und cb die nämlichen Linien werden wie die des Feldes; weil die anliegenden Winkel mit denen des Felddreyeckes gemeinschaftlich sind. Da ab der 4000ste Theil, oder so was von der Sandlinie ist, so muß auch cb der 4000ste Theil der Entfernung seyn, welches der verjüngte Maaßstab angiebt.

§. 102.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer Oerter zu messen, die so beschaffen sind, daß kein dritter Punkt Platz hat, von welchen man zu einem oder zum andern dieser Oerter messen kann.

Auflös. Auch hier thut das Meßtischchen die beßten Dienste. Man wählet eine Sandlinie aus,

von

von deren Endpunkten man nach beyden Oertern sehen kann. Man stelle das Tischchen auf einem dieser Punkte, und visiere nach beyden Oertern sowohl als nach dem andern Endpunkte: ziehe alle drey Linien, die ersten nämlich unbestimmt, und die letzte, die gemessen werden muß, nach verjüngtem Maaße. Ein gleiches thue man auch beym andern Endpunkt, so werden sich zwey Dreyecke auf einer Grundlinie ergeben, wo die Entfernung ihrer Spitzen, die Entfernung der beyden Oerter im verjüngten Maaße auswirft. Fig. 44. ist dieß sinnlich gemacht.

Beweis.

Die zwey Dreyecke auf dem Meßtische stellen im Kleinen die Dreyecke auf dem Felde vor, die aus der Standlinie und aus den unsichtbaren Visierlinien zusammengesetzt sind; folglich ist auch die Entfernung der beyden Spitzen das im Kleinen, was die Entfernung der beyden Oerter auf dem Felde ist.

*) Wem diese und folgende Beweise nicht streng genug scheinen, wie sie's auch wirklich nicht seyn mögen; weil die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke nicht voraus geschickt werden konnte, der kann selbe in meiner praktischen Geometrie nachlesen.

§. 103.

Aufgabe. Eine zugängliche Höhe zu messen.

Auflös. Unter Zugänglichkeit versteht man hier eine mäßige Horizontalentfernung irgend eines Standpunk-

punktes, von wo aus man das Höhenobjekt erblicken, und die Entfernung durch die Kette messen kann. Man nimmt daher einen Höhenmesser (Astrolab), visiert vom Standpunkt aus nach der Spitze des Objekts, so bestimmt sich der Winkel, welchen die Visierlinie mit dem Horizont macht; dann zieht man auf einem Papier eine gerade Linie, schneidet die gemessene Horizontalfernung im verjüngten Maaße davon ab, und trägt durch Hilfe eines Transportärs den gefundnen Winkel darauf, so ist der Perpendikel, welcher diesen Winkel zum Dreyecke schließt, die verlangte Höhe im verjüngten Maaße, bis auf die Höhe des Stativs, welche man am Ende noch hinzu addieren muß.

Beweis.

Könnte man die ganze Entfernung, wie sie ist, zu Papier bringen und den Winkel darauf tragen, so wäre der Perpendikel die wahre Höhe; denn zwischen beyden Dreyecken hätte Kongruenz Platz, zwischen dem Dreyecke nämlich auf dem Felde, welches die Visierlinie, das Höhenobjeckt, und die Horizontallinie macht, und dem Dreyeck auf dem Papiere; weil überall eine Seite und die darauf liegenden Winkel die nämlichen sind. Da nun die Grundlinie des kleinen Dreyckes der 4000ste Theil von den des großer Felddreyeckes ist, so muß auch der Perpendikel auf dem Papiere der 4000ste Theil des Höhenobjeks seyn. Fig. 45. erklärt das Sinnliche vom Gesagten.

§. 104.

Aufgabe. Eine unzugängliche Höhe zu messen.

Auflös. Man mache in einiger Entfernung eine ebne Standlinie ausfindig, deren Endpunkte so beschaffen sind, daß man aus ihnen das Höhenobjekt wenigstens von oben erblicken könne. Man lasse die Standlinie messen, und trage sie verjüngt auf ein Papier. Dann stelle man den Höhenmesser auf die beyden Endpunkte, bestimme sowohl den spitzigen als den stumpfen Winkel, den die Visierlinien mit der Standlinie machen, trage diese Winkel mit Hilfe eines Transportärs auf die verjüngte Linie, und ziehe die Schenkel derselben in ein Dreyeck zusamm, so wird die Höhe des Dreyecks das verjüngte Maaß von der Höhe des Objekts seyn. Fig. 46. macht dieß noch mehr begreiflich, und der Beweis hievon wird so wie die vorhergehenden geführt.

§. 105.

Aufgabe. Den Inhalt einer Fläche auf dem Felde auszumessen.

Auflös. Ist die Fläche ein reguläres Rechteck, wie es die meisten Aecker sind, so darf bloß Länge und Breite gemessen, und diese beyde Zahlen nach §. 91. mit einander multipliciert werden.

Ist die Fläche ein Dreyeck, so kann man entweder die Seiten alle drey messen, und mit ihrem verjüngten Maaße in der nämlichen Ordnung, wie

ein

ein Dreyeck zeichnen, wo sich der Perpendikel leicht bestimmen, und folglich der Flächeninhalt nach §. 94. berechnen läßt: oder man mißt bloß eine bequeme Linie als Basis, dann auch den Perpendikel auf dieselbe, und berechnet die Figur ebenfalls nach §. 94. Bey Bestimmung des Perpendikels aber geht man auf dem Felde so zu Werke. Man mache jenen Winkelpunkt, von wo aus der Perpendikel gefällt werden soll, durch einen eingesenkten Stab oder Fahne sichtbar: dann lasse man die Kette an jener Gegend der Grundlinie, wo beyläufig der Perpendikel hintrifft, in gerader Richtung ausstrecken, und fahre mit einem Winkelmesser so lange auf selber hin und her, bis eines der beyden Diopternliniale, welche einen rechten Winkel bilden müssen, auf den Endpunkt der Grundlinie und das andere auf besagten Winkelpunkt zielet. Man kann das auch durch ein sehr einfaches Instrument thun, wo zwo Latten in Form eines Kreutzes so an ein Stativ befestiget werden, daß eine oben, die andere aber unten längs an der Kette streift. Von diesem Punkt aus wird nun der Perpendikel gemessen.

§. 106.

Aufgabe. Ein Trapetz auf dem Felde zu berechnen.

Auflös. Man messe die Parallelseiten, und ziehe nach eben gegebener Anweisung wo immer den Perpendikel dazwischen, so hat man zur Berechnung der Figur, gemäß §. 95. hinlängliche Stücke.

§. 107.

§. 107.

Aufgabe. Den Inhalt der Trapezoiden und irregulären Vielecken auf dem Felde ohne Meßtische zu bestimmen; vorausgesetzt, daß sich diese Figuren durch gehen lassen.

Auflös. Man stecke nach Belieben Diagonallinien ab, suche schickliche Grundlinien und fälle die Perpendikel dazu, so kann alles Theilweise berechnet und zuletzt in eine Summe gebracht werden.

§. 108.

Aufgabe. Es soll ein Rechteck auf dem Felde in etliche Theile von bestimmter Größe zerstückt werden, wo fallen die Theilungslinien hin?

Auflös. Entweder müssen die Theile gleich werden oder nicht. Im ersten Falle wird die gemessene Grundlinie des Rechteckes durch die Anzahl der Theilnehmer dividirt, wo der Quotus die Grundlinie eines jeden Theiles bestimmt. Im zweyten Falle werden die Grundlinien der Theile durch die Gesellschaftsrechnung ausfindig gemacht.

*) Exempel. Ein in Kultur stehendes Grundstück, das die Form eines Rechteckes hat, soll unter 4 Bauren nach der Anzahl ihres Viehes vertheilt werden. A hatte vorher 17 Stück darauf getrieben, B 22, und C 28; wie viel trifft jeden von der Grundlinie welche 1487 Schuh groß ist?

§. 109.

§. 109.

Aufgabe. Eine Fläche, die man umgehen kann, durch Hilfe des Meßtisches aufzunehmen, das heißt, einen Plan davon zu verfertigen.

Auflös. Man mache die Ecke der Flächenfigur durch eingesenkte Fahnen oder Stabe sichtbar, stelle den Meßtisch an ein solches Eck hin, und visiere nach dem nächsten Stabe, lasse auch diese Kette messen, und schneide sie verjüngt von der Visierlinie ab.

Nun wird der Meßtisch dahin getragen, wohin vorher visiert worden, und so gestellt, daß die Alhidade längs der verjüngten Linie nach dem verlassenen Standpunkt weiset. Hat man diese Richtung verricht, so wird der Tisch fest geschraubt, dann nach einem weitern Stabe fort visiert, gemessen und verjüngt.

Wenn man immer so fort fährt, bis man ganz herum gekommen, ohne einen Fehler gemacht zu haben, so muß sich die verjüngte Figur auf dem Meßtische bey dem letzten Ecke von selbst schliessen, und die Schlußlinie wird das verjüngte Maaß von der auf dem Felde haben. Zu Hause kann man dann diese Figur nach Belieben umarbeiten und ins Feine bringen.

§. 110.

Aufgabe. Eine solche Fläche mittels eines Standpunktes aus der Mitte aufzunehmen.

Auf-

Auflös. Man wähle einen Standpunkt in der Figur, von wo aus man nach allen Endpunkten der Winkel visieren und messen kann. Dahin wird der Tisch gestellt, wirklich nach allen besagten Punkten visiert, gemessen, und der Betrag im verjüngten Maaße an den gezogenen Visierlinien abgeschnitten. Am Ende werden die Endpunkte auf dem Meßtische durch Linien vereinigt, so ist die Fläche aufgenommen.

§. 111.

Daß man bey größern Revieren mehr als einen solchen Standpunkt nonnöthen habe, ist begreiflich: noch begreiflicher aber scheint es mir zu seyn, daß dergleichen Arbeiten nicht mehr Jugendunternehmungen seyn können, folglich in dieser Schrift keinen Platz mehr haben.

Erklärungen der Körperfiguren.

§. 112.

Eine Körperfigur ist ein von Flächen allenthalben begränzter Raum. Die Gränzen können ebne oder krumme Flächen seyn; und in beyden Fällen giebt es sowohl reguläre als irreguläre Körper: oder mit andern Worten, Körper, deren Inhalt sich geometrisch bestimmen, und andere, wovon er sich nicht geometrisch bestimmen läßt.

Von regulären Körpern soll es uns genügen, das Prisma, die Walze, die Pyramide, den Ke-

gel und die Kugel kennen zu lernen. Von den irregulären Körpern aber wollen wir bloß zeigen, wie man ihren Inhalt durch Kunstgriffe zu bestimmen sucht.

§. 113.

Wenn man lauter gleiche Dreyecke, oder lauter gleiche Vierecke, oder auch lauter gleiche Polygone aufeinander hinauflegt, vorausgesetzt, daß diese Flächen eine sehr kleine Dicke haben, so entsteht ein **Prisma.** Ist die Grundfläche, das ist, die erste ursprüngliche Fläche des Körpers, ein Parallelogram, so heißt das Prisma ein **Parallelepipedum.** Ist die Grundfläche ein Quadrat, und der Körper so hoch als eine Seite desselben, so wird diese Art von Prisma, oder diese Art von Parallelepipedum **Rubus** genennt.

Werden solche Dreyecke, oder Vierecke oder auch Polygone aufeinander hinauf gelegt, daß immer eins kleiner als das andere ist, und sich zuletzt in einer Spitze endigen, so daß von dieser Spitze so viel ebne Gränzdreyecke hinablaufen, als viele Seiten die übereinander liegenden Figuren haben, so heißt man den entstandnen Körper eine **Pyramide.**

Sind die aufeinander gelegten Figuren lauter Zirkel, die so abnehmen, daß von der Spitze des Körpers bis auf die Grundfläche überall gerade Berührungslinien (Tangenten) herabgezogen werden können, so giebt dieß einen Kegel.

Nehmen die aufeinander liegenden Zirkelflächen so an Größe immer ab, daß sie ein darüber beschriebener Halbzirkel alle berührt, so stellt sich eine halbe Kugel dar, welche doppelt genommen eben darum die ganze Kugel geben muß. Fig. 47. sind alle diese Körperfiguren entworfen.

*) Sollte sich Jemand an diesen Erklärungen stossen, weil sie ihm etwa ungewöhnlich scheinen, für den will ich auch die üblichen geometrischen Definitionen hersetzen:

Ein Prisma entsteht, wenn eine geradlinichte Flächenfigur sich in einer parallelen Lage aufwärts bewegt, und sich immer selbst zurückläßt. Ist die sich bewegenge Flächenfigur ein Parallelogram, so heißt der Körper Parallelpipedum: ist sie ein Quadrat, und die Höhe des Körpers die Quadratseite, so heißt der Körper Kubus.

Eine Walze entsteht auf zweyerley Weise; entweder wenn sich ein Zirkel, wie eben gesagt worden, aufwärts bewegt, oder wenn sich ein rechtwinklichtes Parallelogram um eine seiner Seiten bis zur ersten Stellung herum drehet.

Eine Pyramide entsteht, wenn über einer Fläche eine gerade Linie an dem einen Ende fest ist, und sich mit dem andern um den Umfang einer geradlinichten Figur herum bewegt.

Ein Kegel entsteht, wenn sich ein rechtwinklichtes Dreyeck um seinen Perpendikel ganz herum bewegt.

Eine Kugel entsteht, wenn sich ein halber Zirkel um seinen Durchmesser herum bewegt.

Berechnung des Inhalts regulärer Körper.

§. 114.

Der Inhalt eines Prisma ist gleich dem Produkte aus der Grundfläche in die Höhe. Denn auf der Grundfläche können gerade so viele Kubikschuhe stehen, als viele Quadratschuhe die Grundfläche groß ist. Diese Schichte vom Kubikschuhen aber kann im Prisma aufwärts so oft wiederholt werden, als viele Schuhe das Prisma hoch ist. Daher muß die Anzahl aller Kubikschuhe einer Schichte mit der Anzahl der Schichten, das ist die Grundfläche mit der Höhe multipliciert werden.

§. 115.

Da bey Parallelepipeden die Grundfläche ein Parallelogram ist, dessen Flächeninhalt durch Multiplicierung der Länge mit der Breite bestimmt wird; so kann man behaupten, daß der kubische Inhalt eines solchen Parallelepipedums allemal ein Produkt aus drey Faktoren seye, nämlich aus Länge, Breite und Tiefe oder Höhe.

§. 116.

Da eine Walze nichts anders ist als ein Prisma, welches ein Polygon von unendlich vielen und kleinen Seiten, das ist einen Zirkel zur Grundfläche hat, so wird diese Körperfigur eben so, wie das Prisma berechnet, man multipliciert nämlich die Grundfläche, welche aber nach §. 97. erst gesucht werden muß, mit der Höhe der Walze.

§. 117.

§. 117.

Beym Kubus ist die Grundfläche ein Quadrat, wo eine Seite davon die Höhe des Kubusses vorstellt: folglich ist der Inhalt eines Kubusses ein Produkt aus drey gleichen Faktoren, man mag Länge, Breite oder Höhe als Faktoren annehmen.

§. 118.

Aufgaben. a) Die Seite eines Kubusses habe 3′ 9″ Duodecimalmaaß; wie groß ist der körperliche Inhalt?

b) Ein **Parallelepipedum** ist 3′ 7″ lang 2′ 11″ breit und 4′ hoch; wie viele Kubikfüße hält es in sich?

c) Ein **Prisma**, welches 8′ 2″ hoch ist, hat zur Grundfläche ein Dreyeck, wovon die Grundlinie 3′ 10″ und der Perpendikel auf selbe 2′ 8″ mißt; was ist sein kubischer Betrag?

d) Eine **Walze**, welche $7\frac{1}{2}'$ hoch ist, und der Diameter der Grundfläche $3\frac{3}{4}'$ mißt, soll berechnet werden; was findet man für einen kubischen Inhalt?

a) Berechnung des Kubusses.

3′ 9″
12
45″
45
225
180
2024
45
10120
8100
91120

91120 | 52 Kubikschuhe und
1728 | 1264 Kubikzolle.
8640
4725
1728
2456
1264

b) Berechnung des Parallelepipedums.

3′ 7′ 2′ 11″ 4′
12 12 12
43″ 35″ 48″
43
144
192
2064
35
10320
6192
72240

72240 | 41 Kubikfüsse und
1728 | 1392 Kubikzolle.
6912
3120
1728
1392

c) Be

c) Berechnung des Prisma.

3′ 10″ | 2′ 11″ | 8′ 2″

12 | 12 | 12

46″ | 32″ | 98″

32

92

138

736

98

5888

6624

72128

72128 | 41 Kubikſch.
1728 | 1280 Kubikſ.
6912

3008
1718

1280

d) Berechnung der Walze.

Allererſt werde die Peripherie gefunden.

Schuh Periph? | $3\frac{3}{4}$ Sch. Diam.

$3\frac{1}{7}$ Sch. Periph.

1 | 7 | 22 | 4 | 15 | 2 | 11

14 | 15

215

165

Antw. $\frac{165}{14}$ Sch. Periph.

Wird

Wird nun die Peripherie mit dem halben Radius oder mit dem 4ten Theil des Diameters multipliciert, so erscheint die Zirkelfläche als Basis. Es ist aber der 4te Theil des Diameter $3\frac{3}{4} : \frac{4}{1} = \frac{15}{1} \times \frac{1}{4} = \frac{15}{16}$. Daher

$$\frac{15}{14}\frac{6}{4} \times \frac{15}{16}$$

165 | 16
15 | 14
825 | 64
165 | 16
2475 | 224
224
235
224
11

1728
11
1728
1728
19008
224
1792
1088
224
896
192
224

Antw. 11 Kubikſch. und $84\frac{6}{7}$ Kubikzolle.

*) Exem-

*) Exempel. 1) Ein Getreidkasten ist kubisch gebaut und hält eine Seite $13\frac{1}{3}'$; wie viel bairische Schäffel Getreides faßt er, da ein solches Schäffel allerhöchstens 9 bairische Kubikschuhe hält?

2) Mit welcher Gewalt drückt eine Mauer auf die Erde, welche $67'$ lang $3\frac{1}{2}'$ dick und $11'$ hoch ist, wenn der bairische Kubikschuh Mauerwerk 88 Pf. schwer ist?

3) In einer Braukühle, welche $87\frac{1}{3}'$ lang und $14\frac{1}{2}'$ breit ist, steht das Bier $2\frac{1}{2}''$ hoch, wie viel Maaß sind es; da $72\frac{1}{2}$ bairische Kubikzoll eine bairische Maaß geben?

4) Die steinerne Walze, womit im hiesigen Hofgarten die Teraſſen feste gemacht werden, ist $3\frac{1}{4}'$ hoch und der Durchmesser der Grundfläche mißt $2'\ 5''$; wie schwer mag sie seyn, wenn der bairische Kubikfuß dieser Steinart 120 bairische Pfunde wiegt?

5) Ein Teich ist zirkelrund und hält im Durchmesser $63'$. In einem Winter gefror er $1\frac{3}{4}'$ dick. Wie groß mußte ein Eiskeller seyn, der alles sein Eis zu fassen im Stande war?

6) Es soll ein Pfeiler von achteckichter Grundfläche $3^{2'}$ hoch aufgeführt werden. Wie viel braucht man Ziegelsteine; wenn ein Ziegelstein sammt seinem Mauerband 264 bairische Kubikzoll ausfüllt, und wenn eine Seite des Achteckes $5'$ und dessen Höhe $6'$ beträgt?

7) Bey irgend einem Melber wurde ein Dreyßger vorgefunden, der $3\frac{3}{8}''$ tief war, und der Durchmesser des Bodens $5\frac{5}{8}''$ hielte. Um wie viele Kubikzolle ist dieses Mehlmaaß zu klein oder zu groß, da jeder ächte Dreyßger $78\frac{7}{10}$ solche Zolle halten muß?

§. 119.

§. 119.

Es kömmt also bey der Berechnung der Prismen und Walzen alles auf die Grundfläche und Höhe an: gerade so wie in der Planimetrie bey Parallellogramen und Trapetzen, wo nur Grundlinie und Höhe in die Rechnung gebracht werden dorfte. Man findet demnach den kubischer Inhalt überhängender Walzen und Prismen gleichfalls, wenn man die Grundfläche mit der wahren Höhe, das ist, mit dem Perpendikel multipliciert; weil die Anzahl der aufeinander liegenden Flächen, woraus das Prisma oder die Walze besteht, bey der nämlichen Höhe allemal sich selbst gleich bleiben muß, man mag ihnen die überhängende Gestalt ertheilen wie man will; weun nur alle Flächen unter sich parallel bleiben. Zum anschaulichen Beweis dient jedes Buch, dessen Blätter in eine verschränkte Lage gebracht werden.

§. 120.

Jedes dreyeckichte Prisma läßt sich durch Diagonalschnitte in drey gleiche Pyramiden zertheilen, bey welchen sich zwo vorfinden, wo jede die Höhe und die Grundfläche mit dem Prisma gemein hat. Die dritte erhält in einer andern Lage mit einer dieser erstern Pyramiden gleiche Höhe und Grundfläche *). Folglich ist eine Pyramide von dreyeckichter Grundfläche der dritte Theil eines Prisma, das die nämliche Höhe und Grunfläche, wie die Pyramide hat.

*) Den Beweis dieses Satzes kann sich jeder von seinen Lehrer praktisch zeigen lassen. Denn man darf nur ein Stück

§. 121.

Weil man eine Pyramide und ein Prisma von mehreckichten gleichen Grundflächen und der nämlichen Höhe in eine gleiche Anzahl solcher Körperfiguren von dreyeckichten Grundflächen zerschneiden kann, wo jede Pyramide der dritte Theil von dem ihm entsprechenden Prisma seyn muß; so ist der Satz nicht bloß von dreyeckichten Pyramiden, und Prismen sondern von allen mehreckichten Körperfiguren dieser Art erwiesen.

Auch von Kugeln und Walzen ist dieß wahr, weil ihre Grundflächen nach §. 97. Dreyecken gleich kommen; oder weil sie Polygone von unendlich vielen und kleinen Seiten sind, folglich ebenfalls wieder zu den Pyramiden und Prismen gehören.

§. 122.

Um demnach den körperlichen Inhalt einer Pyramide oder eines Kegels zu finden, wird die Grundfläche mit der Höhe multipliciert, und das Produkt durch 3 dividiert. Oder man multipliciert sogleich die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe.

§. 123.

Aufgaben. 1) Eine Pyramide hat zur Basis ein Dreyeck, wovon die Grundlinie $7\frac{1}{2}'$ und

der

Stück Brod oder Käs, oder ein Gartengewächs, z. B. eine Rübe hernehmen, erst zurecht schneiden, und dann das Prisma durch die gehörigen Schnitte zertheilen.

der Perpendikel $5\frac{3}{4}'$ mißt. Die Höhe der Pyramide beträgt $11\frac{1}{3}'$. Wie groß ist der körperliche Inhalt desselben?

2) Ein Kegel, der $14\frac{1}{6}'$ hoch ist, hält im Durchmesser seiner Grundfläche $8\frac{2}{3}'$; was ist sein Körperinhalt?

Berechnung der ersten Aufgabe.

Grundfläche: $(7\frac{1}{2} \times 5\frac{3}{4}) : \frac{2}{1} = \frac{15}{2} \times \frac{23}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{345}{16}$ Quadratschuh.

Körperlicher Inhalt $(\frac{345}{16} \times 11\frac{1}{3}) : \frac{3}{1} = \frac{345}{16} \times \frac{34}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{11730}{144}$. Nun wirklich dividirt.

11730 | 81 Kubikschuhe
144
1152

210 | 1728
144 | 66

66. | 10368
10368

114048 | 792 Kubikzolle.
144
1008

1324
144
1296

288
144
288

0

Be-

Berechnung der zwoten Aufgabe.

Man bestimme allererst die Peripherie.

Schuh Periph	$8\frac{2}{3}$ Schuh Diam.
1	$3\frac{1}{7}$ Schuh Periph.
7	22
3	26
21	132
	44
	572
Antw.	$\frac{572}{21}$ Schuhe. Daher

die Grundfläche: $(\frac{572}{21} \times 8\frac{2}{3}) : \frac{4}{1} = \frac{572}{21} \times \frac{26}{3} \times \frac{1}{4} = 1\frac{487}{252}{}^2$ Quadratschusche.

Körperlicher Inhalt $(1\frac{487}{252}{}^2 \times 14\frac{1}{6}) : \frac{3}{1} = 1\frac{487}{252}{}^2 \times \frac{85}{6} \times \frac{1}{3} = 1\frac{6412}{4533}{}^2$ Kubikschuhe.

Man dividire wirklich.

1264120 | 278 Kubikschuhe
4536.. | 1
9072

35692
4536

31752

39400
4536

86288

3112

1728

3112
1728
24896
6224
21784
3112
5377535 | 1185 $\frac{11}{21}$ Kubikzolle.
4536 ... |
8415
4536
38793
4536
36288
25056
4536
22680
2376 | 2 = $\frac{264}{504}$ | 4 =
4536 |
6
$\frac{66}{126}$ | = $\frac{11}{21}$

*) Exempel. 1) Es soll eine Pyramide von 17′ Höhe aus Stein ausgehauen werden. Die Basis muß ein Quadrat seyn, wovon die Seite $3\frac{1}{2}'$ mißt. Was wird diese Pyramide wiegen, wenn der Kubikfuß 112 bairische Pfunde schwer ist.

2) Ein Kelchgläschen ist $2\frac{1}{3}''$ tief, und hat zum Durchmesser der Oeffnung $1\frac{3}{4}''$. Wie viel solche Gläschen gehen auf eine Maaß, welche $72\frac{1}{2}$ Kubikzoll halt?

§. 124.

§. 124.

So wie sich die Zirkelfläche in unendlich viel Dreyecke zerschneiden läßt, die den Radius zur Höhe haben, und deren Grundlinien zusammengenommen die Peripherie ausmachen; so kann auch eine Kugel in unendlich viele Pyramiden zerschnitten werden, deren allgemeine Höhe der Radius ist, und deren sämmtliche Grundflächen die ganze Oberfläche der Kugel gehen.

Es ist aber die ganze Oberfläche der Kugel allemal 4 solchen Zirkelflächen gleich, die durch die Mitte der Kugel gehen.

*) Der Beweis dieses Satzes, welcher umständlich in meinem größern Werke von der Elementargeometrie vorgetragen wird, setzt zu vieles voraus, als daß er hier geführt werden könnte. Man muß ihn daher als einen Lehnsatz gelten lassen; beyläufig wie §. 90. vom Zirkel.

§. 125.

Man findet daher den körperlichen Inhalt einer Kugel, wenn man alle Grundflächen der Pyramiden (nämlich die Oberfläche der Kugel) durch den 3ten Theil des Radius, oder was eines ist, mit dem 6ten Theil des Durchmessers, multipliciert. Z. B. Eine Kugel hält im Durchmesser 11 Zoll; was ist der kubische Inhalt hievon?

Berechnung.

Man bestimme anfänglich die Peripherie.

Zoll Periph?	11 Z. Diam.
1	$3\frac{1}{7}$ Zoll Periph.
7	22
	11
	22
	22
	242

Antw. $\frac{242}{7}$ Zoll Periph.

Nun die vierfache Zirkelfläche.

$\frac{242}{7} \times \frac{11}{4} \times \frac{4}{1} = \frac{242}{7} \times \frac{11}{1} = \frac{2662}{7}$ Quadratzoll.

Endlich den Körperinhalt der Kugel.

$\frac{2662}{7} \times \frac{11}{6} = \frac{29282}{42}$

$$\begin{array}{r} \overset{2}{\frown} \\ 29282 \;\big|\; 697\tfrac{4}{21} \text{ Kubikzolle} \\ 42\cdot\cdot \;\big|\; \\ 252 \\ \hline 408 \\ 42 \\ \hline 378 \\ \hline 302 \\ 42 \\ \hline 294 \\ \hline 8 \end{array}$$

*) Erem=

*) Exempel. 1) Die Erdkugel hält im Durchmesser 1720 geographische Meilen; wie groß ist 1) ihre Oberfläche in Quadratmeilen, 2) ihr körperlicher Inhalt in Kubikmeilen?

2) Eine gläserne Hohlkugel ist 15″ hoch; wie viel Maaß würde sie halten, da, wie schon öfter erinnert worden, die bairische Maaß $72\frac{1}{2}$ Kubikzoll groß ist?

3) Eine steinerne Kugel hält 18″ im Durchmesser; was wiegt sie, wenn der Kubikfuß Stein 120 Pfund schwer ist?

4) Eine eiserne Kanonkugel hat im Durchmesser genau $5\frac{171}{1000}$ Zoll rheinisches Maaß, was wiegt sie, wenn der rheinische Kubikschuh gegossenes Eisen 390 bairische Pfund 21 Loth schwer ist?

Von Ausmessung irregulärer Körper.

§. 125.

Es giebt Körper, die, mit geometrischem Auge betrachtet, eine so unregelmäßige Gestalt haben, daß sie lediglich keiner Ausmessung fähig sind. Von dieser Art sind losgerissene Steine oder Felsenstücke, Kunstsachen, als Staten u. d. gl.

In solchen Fällen muß man, wenn ja dergleichen Dinge beweglich sind, zu andern Kunstgriffen seine Zuflucht nehmen. Eine davon ist, daß man reguläre Gefässe verfertigt, die z. B. die Form eines Parallelepipedums haben, sie eben stellt, und die Körper hineinsetzt. Werden sie nun mit Wasser oder recht feinem Sande bedeckt, und dann wieder herausgehoben, so kann der Raum, um welchen das Wasser oder der angeebnete Sand,

niedrer geworden, leicht gemessen und berechnet werden. Dieß muß nun eben darum die geometrische Größe eines solchen Körpers seyn.

Zum Beyspiel, man hat eine steinerne Statue. Das parallelepipedumförmige Gefäß werde mit einer Grundfläche von 18′ versehen. Es sey befunden worden, daß, nach der Herausnahme der Statue, das Wasser um $1\frac{1}{3}$′ gefallen sey, so ist nichts natürlicher, als daß der Körper $18 \times 1\frac{1}{3} =$ 24 Kubikschuh messe.

§. 126.

Ungleich bequemer, weniger kostspielig und eben so genau, wo nicht vielleicht genauer, läßt sich die geometrische Größe eines solchen Körpers durch sein Gewicht erfahren, vorausgesetzt, daß dessen eigenthümliche Schwere bekannt ist. Die eigenthümlichen Schweren findet man aber von den meisten Körpern in Muschenbröcks Tabelle, die nun beynahe unter Freunden der Naturlehre in jedermanns Händen ist. Man darf da nur den Kettensatz zu Hilfe nehmen, und die ganze Sache ist abgethan. Wir wollen dieß in einem Beyspiele zeigen. Ein silberner Leuchter wäge 7 ℔. In obbesagter Tabelle findet man, daß die eigenthümlichen Schweren des Wassers und des Silbers wie 1 und $10\frac{1}{2}$ sind; oder mit andern Worten, daß Silber $10\frac{1}{2}$mal schwerer als Wasser sey, folglich haben 1 Pfund Wasser und $10\frac{1}{2}$ Pf. Silber einerley geometrische Größe. Da nun bekannt ist, daß ein bairischer Kubikschuh Wasser $44\frac{7}{10}$ bairische Pfunde wiegt, so muß die Sprechform des Kettensatzes also heißen:

ßen: Wie viele Kubikzoll halten 7 ℔ Silber; wenn $10\frac{1}{2}$ ℔ Silber so viel geometrische Größe enthalten, als 1 ℔ Wasser, und $44\frac{7}{10}$ ℔ Wasser 1 Kubikschuh giebt, und 1 Kubikschuh 1728 Zoll beträgt?

Kub. Zoll?	7 ℔ Silb.
$10\frac{1}{2}$	1 ℔ Wasser.
$44\frac{7}{10}$	1 Kubikschuh.
1	1728 Kub. Zoll.
Antw.	$25\ \frac{345}{447}$ Kubikzoll.

Exempel 1) Wie groß darf ein Geschirr seyn, welches einen Zentner Queckfilber fassen soll, wenn dessen eigenthümliche Schwere 14mal größer als die des Wassers ist?

2) Ein italienisches Marmorstück wiegt genau 740 Pfund; wie viele Kubikschuhe hält es, wenn diese Marmorart $2\frac{7}{10}$mal schwerer als Wasser ist?

Auflösung der in diesem Werkchen aufgeworfenen Exempel.

Seite 4.

Exempel 1) Antw. 6 Schuh $7\frac{1}{1}\frac{3}{3}\frac{5}{9}\frac{4}{1}\frac{1}{3}$ Zoll.

Exempel 2) Antw. $114\frac{5}{6}\frac{6}{4}\frac{3}{6}\frac{9}{9}$ bairische, $103\frac{3}{1}\frac{0}{4}\frac{1}{4}\frac{}{0}$ französische und $106\frac{1}{1}\frac{1}{3}\frac{4}{9}\frac{3}{1}\frac{2}{3}$ rheinische Schuhe.

Exempel 3) Antw. 3 Schuh, 4 Zoll, $10\frac{1}{6}\frac{7}{4}\frac{6}{6}\frac{0}{9}$ Linien.

Exempel 4) Antw. $9771\frac{2}{1}\frac{4}{4}\frac{3}{0}\frac{9}{1}\frac{}{1}$ bairische Schuhe.

Seite 6.

Exempel 1) Antw. $16537\frac{7}{9}$ bairische Quadratschuh.

Exempel 2) Antw. $34590\frac{3}{1}\frac{3}{9}\frac{1}{3}\frac{8}{5}\frac{8}{7}\frac{2}{1}\frac{9}{5}\frac{}{6}\frac{}{9}$ rheinische Quadratschuh.

Exempel 3) Antw. 29 Quadratfuß und $93\frac{1}{9}\frac{0}{3}\frac{3}{0}\frac{2}{2}\frac{6}{4}\frac{9}{8}$ Quadratzoll Königsbergermaaß.

Seite 7.

Exempel Antw. 8 Kubikfch. $1699\frac{9}{2}\frac{8}{7}\frac{6}{0}\frac{7}{7}\frac{3}{1}\frac{9}{4}\frac{3}{4}\frac{7}{5}\frac{1}{9}\frac{9}{7}\frac{3}{0}\frac{}{9}$ im bairischen Maaße.

Seite 8.

Exempel. Antw. $117\frac{1}{1}\frac{6}{7}\frac{7}{0}\frac{0}{3}\frac{2}{4}\frac{5}{1}\frac{0}{0}\frac{5}{6}\frac{7}{5}\frac{8}{1}\frac{3}{7}$ Manheimerkubikschuhe.

Seite 9.

Exempel. Antw. 2 Schuh 8 Zoll $5\frac{4}{1}\frac{7}{2}\frac{}{5}$ Linien Duodecimalmaaß.

Seite 25.

Exempel. Antw. 115° 8′ am Sommeranfang, 138° 38′ zur Zeit der Nachtgleiche, und 126° 8′ am Winteranfang.

Seite 50.

Exempel 1) Antw. Im ersten Dreyecke hält jeder Winkel an der Grundlinie 68° $22\frac{1}{2}'$, im zweyten Dreyecke mißt der Winkel am Scheitel 44° 44′.

Exempel 2) Antw. 111° 26′.

Seite 51.

Exempel. Antw. Jeder der spitzigen Winkel 51° 27′ und der übrige stumpfe Winkel 38° 33′, wie der gegebene.

Seite 58.

Exempel 1) Antw. $20\frac{3}{7}$, hält die Peripherie des Rades.

Exempel 2) Antw. $5405\frac{5}{7}$ geographische Meilen.

Exempel 3) Antw. $270\frac{2}{7}$ Schuh lang.

Exempel 4) Antw. $33\frac{9}{22}$ Minuten.

Seite 61.

Exempel 1) Antw. 3906 Quadratschuh.

Exempel 2) Antw. Nicht gar 5145 Marmorplatten.

Exempel 2) Antw. 3230 Quadratschuh.

Seite 63.

Exempel. Antw. 1 Tagwerk und 10047 Quadratschuhe.

Seite 64.

Exempel. Antw. $2296\frac{11}{24}$ Quadratschuhe.

Seite 66.

Exempel 1) Antw. 2349 Quadratsch. hält die Grundfläche des Chineserthurms.

Exempel 2) Antw. $1829\frac{5}{9}$ Quadratschuh.

Seite 67.

Exempel 1) Antw. Etwas über 46 Bretter.

Exempel 2) Antw. Gegen 290 Bretter.

Seite 69.

Exempel. Antw. $18424\frac{11}{12}$ Quadratsch.

Seite 79.

Exempel. Antw. A $377\frac{20}{67}'$, B $621\frac{29}{67}'$ und C $488\frac{18}{67}'$.

Seite 89.

Exempel 1) Antw. $263\frac{91}{243}$ Schäffel.

Exempel 2) Antw. Mit einer Gewalt von 2269 Zentner 96 ℔.

Exempel 3) Antw. 104 Eimer 48 Maaß.

Exempel 4) Antw. 12 Zentner $42\frac{9643}{12221}$ ℔.

Exempel 5) Antw. $5457\frac{7}{10}$ Kubikfuß.

Exempel 6) Antw. Beynahe 25135 Ziegelsteine.

Exempel 7) Antw. Um $1\frac{15627}{35840}$ Kubikzoll zu groß.

Seite 97.

Exempel 1) Antw. Die Oberfläche der Erde hält $9297828\frac{4}{7}$ Quadratmeilen, und der körperliche Inhalt derselben ist $26653770471\frac{16}{21}$ Kubikmeilen.

Exempel 2) Antw. $22\frac{82}{203}$ Maaß.

Exempel 3) Antw. 2 Zentner $12\frac{1}{7}$ ℔.

Exempel 4) Antw. 16 ℔ $11\frac{34831546279821}{36288000000000}$ Loth.

Seite 99.

Exempel 1) Antw. $106\frac{23261}{81296}$ bairische Kubikzoll.

Exempel 2) Antw. 6 Kubikschuh und $227\frac{85}{13411}$ Kubikzolle.

Verbesserungen.

Seite 50 Linie 6 von unten, statt Fig. 31 lies Fig. 32.

S. 51 Linie 9 von oben, muß nach dem Wort: Winkel ein Punkt gemacht, und so fortgefahren werden: Es halte z. B. einer von den 4 Winkeln ꝛc.

Seite 69 Linie 3 von oben, statt $\frac{1}{3}$ lies $\frac{1}{6}$.

Seite 70 Linie 7 von unten, streiche man die Worte aus: oder die Hälfte nach k.

Seite 74 Linie 13 von oben, statt a b lies ab.

Seite — — 14, 19 und 29 statt Sandlinie lies Standlinie.

Seite 82 Linie 17 von oben, muß noch hinzugesetzt werden: Ist die Grundfläche ein Zirkel, so hat man die Walze.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Erste Tafel.

Fig. 1.

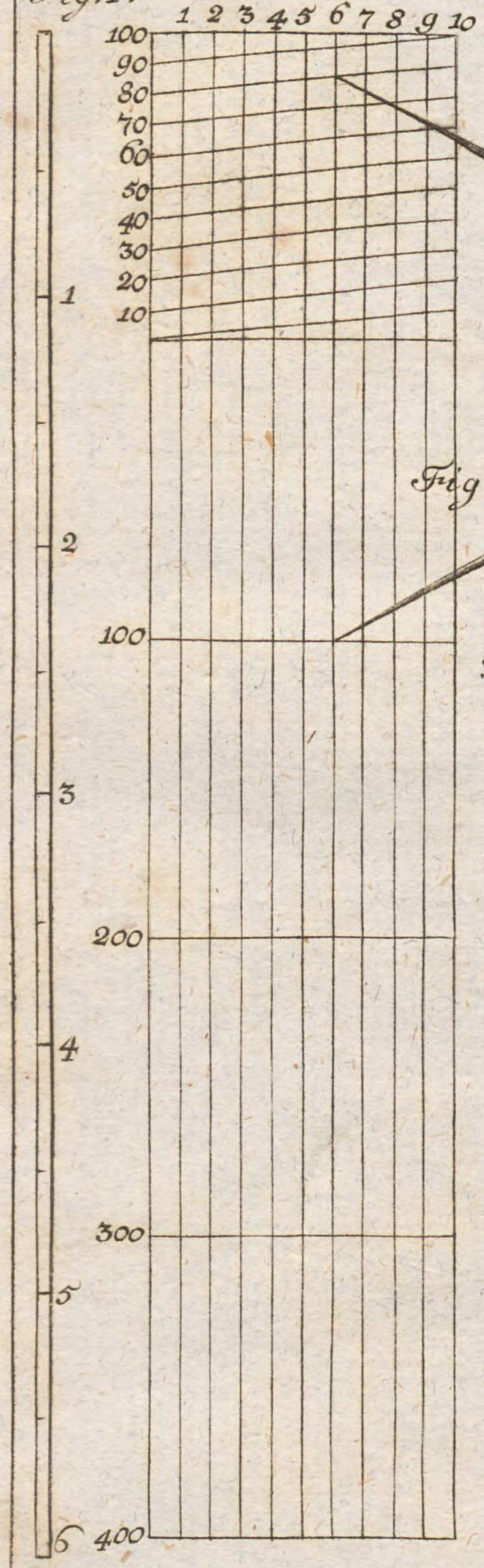


Fig. 2.

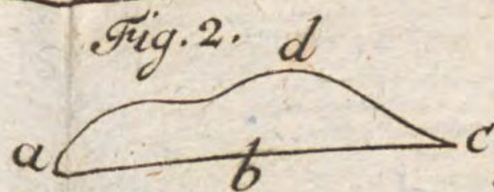


Fig. 3.

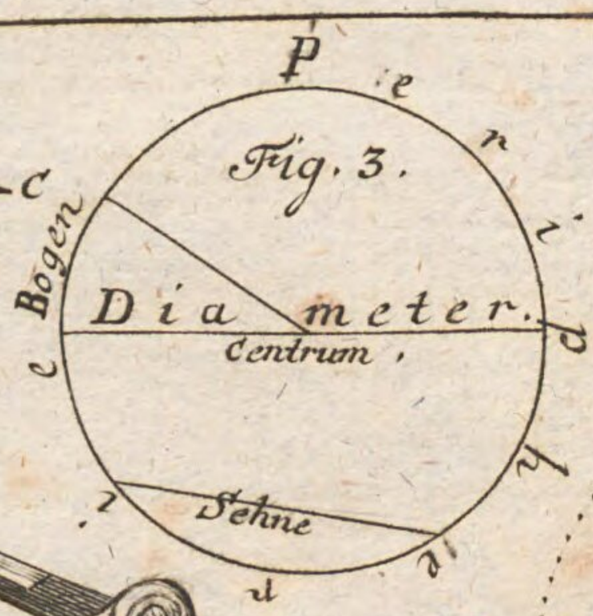


Fig. 5.

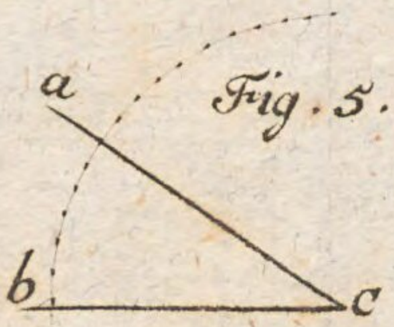
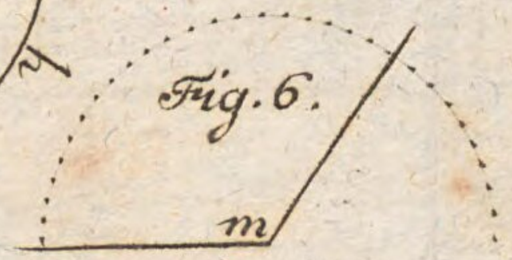


Fig. 6.



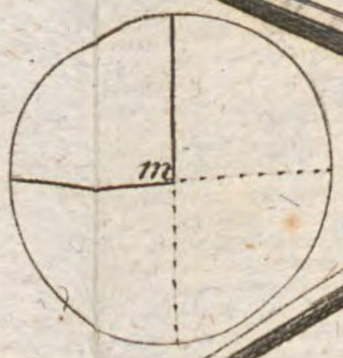


Fig. 4.

Fig. 7.

Fig. 8.

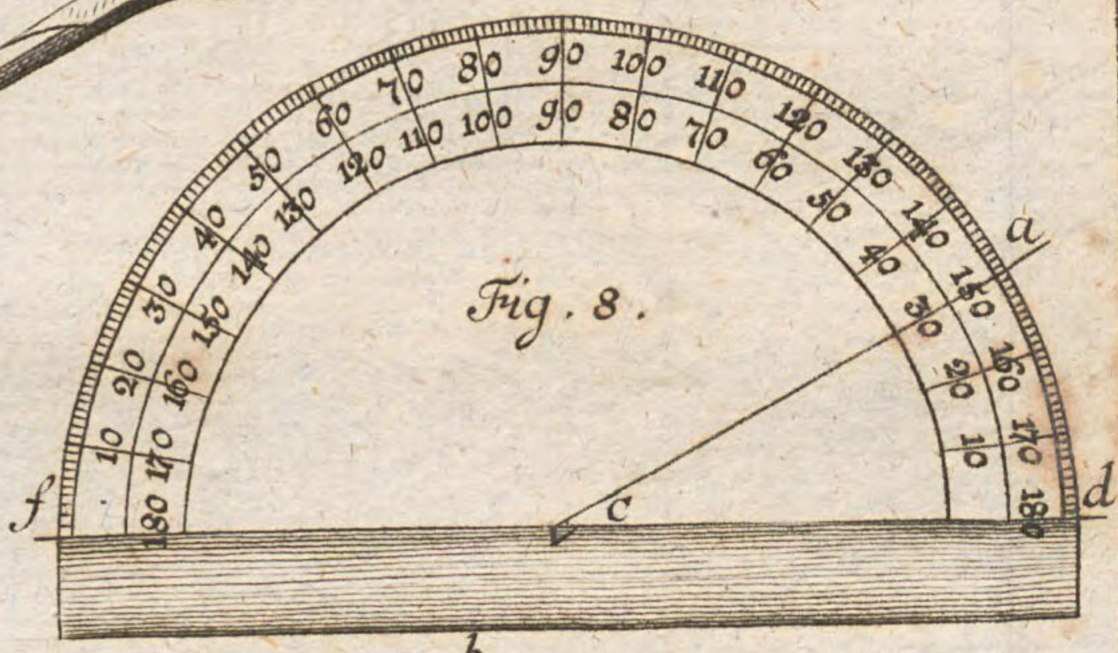


Fig. 10.

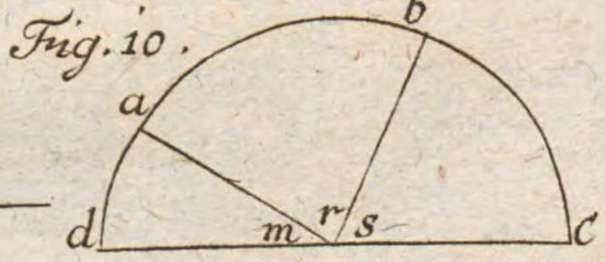


Fig. 11.

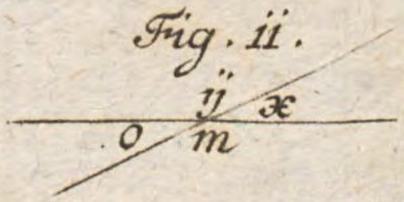


Fig. 9.

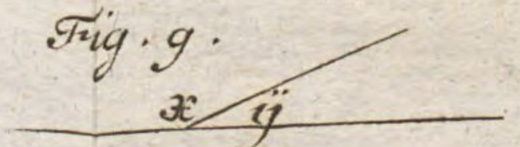


Fig. 12.

Fig. 13.

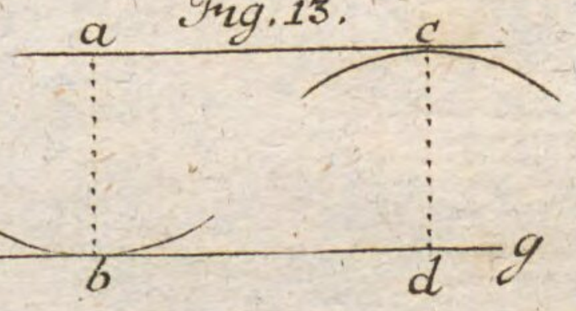


Fig. 15.

Fig. 16.

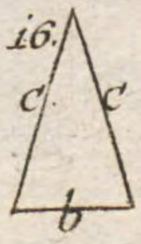


Fig. 17.

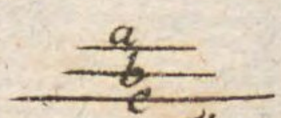


Fig. 21.

Fig. 14.

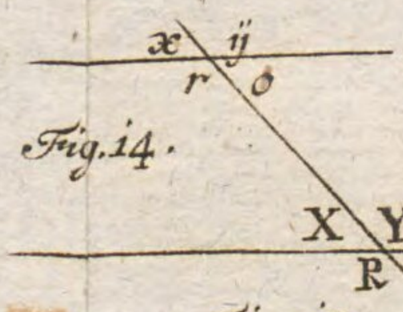


Fig. 18.

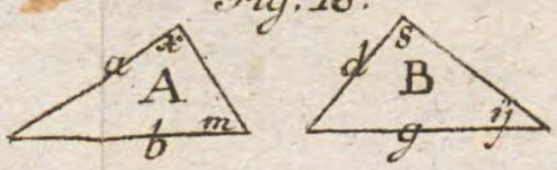
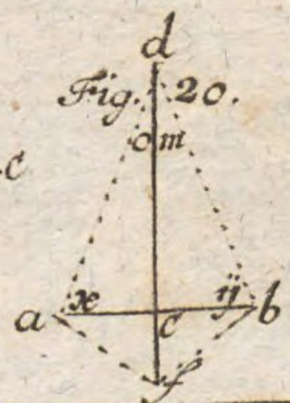
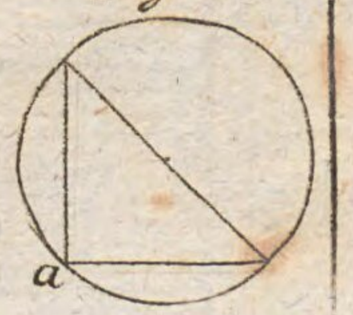


Fig. 19.

Fig. 20.





Zweite Tafel.

Fig. 22.

Fig. 23.

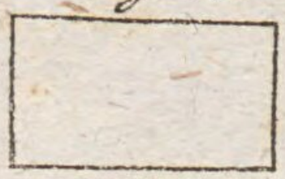


Fig. 24.

Fig. 25.

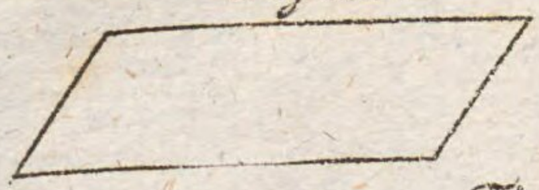


Fig. 26.

Fig. 27.

Fig. 28.

Fig. 29.

Fig. 30.

zu Fig. 30.

Fig. 31.

Fig. 32.

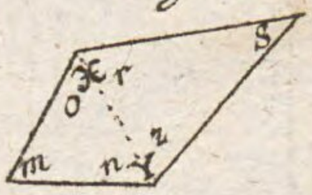


Fig. 33.

Fig. 34.

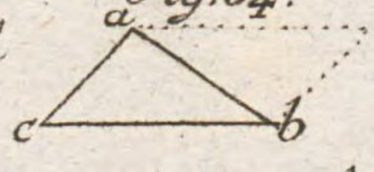


Fig. 35.

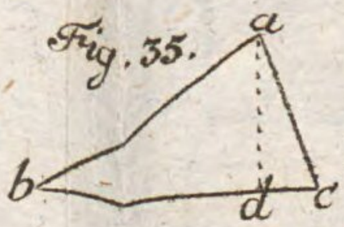


Fig. 36.

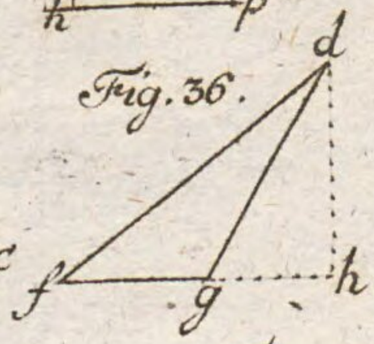


Fig. 37.

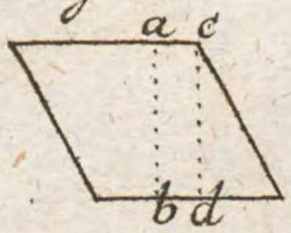


Fig. 38.

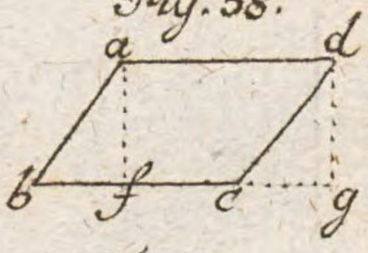


Fig. 39.

Fig. 40.

Fig. 41.

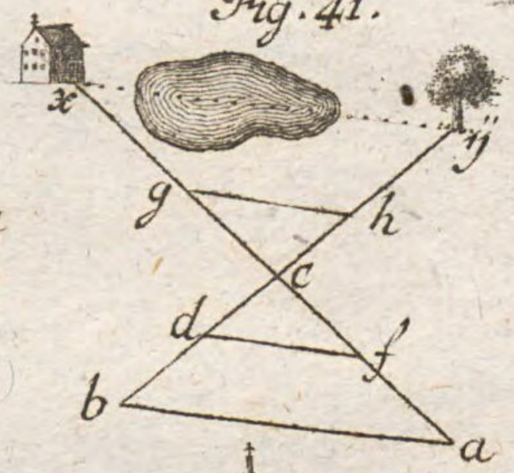


Fig. 42.

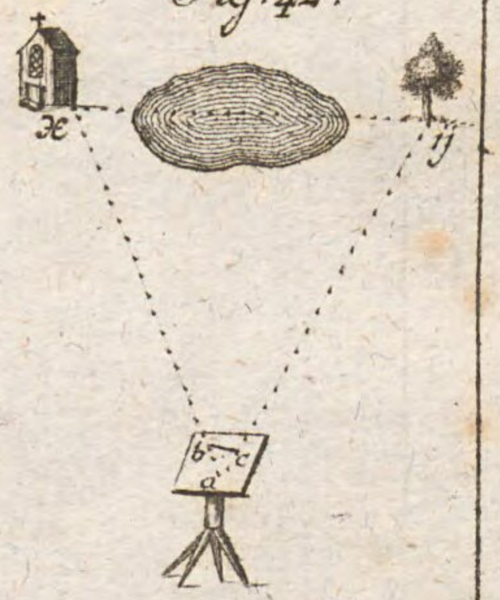


Fig. 43.

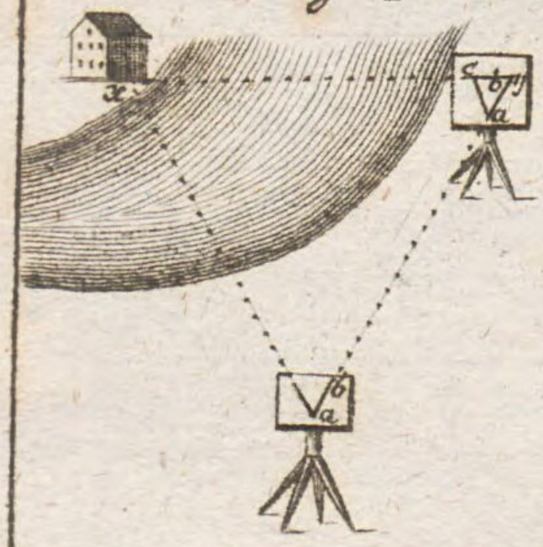


Fig. 44.

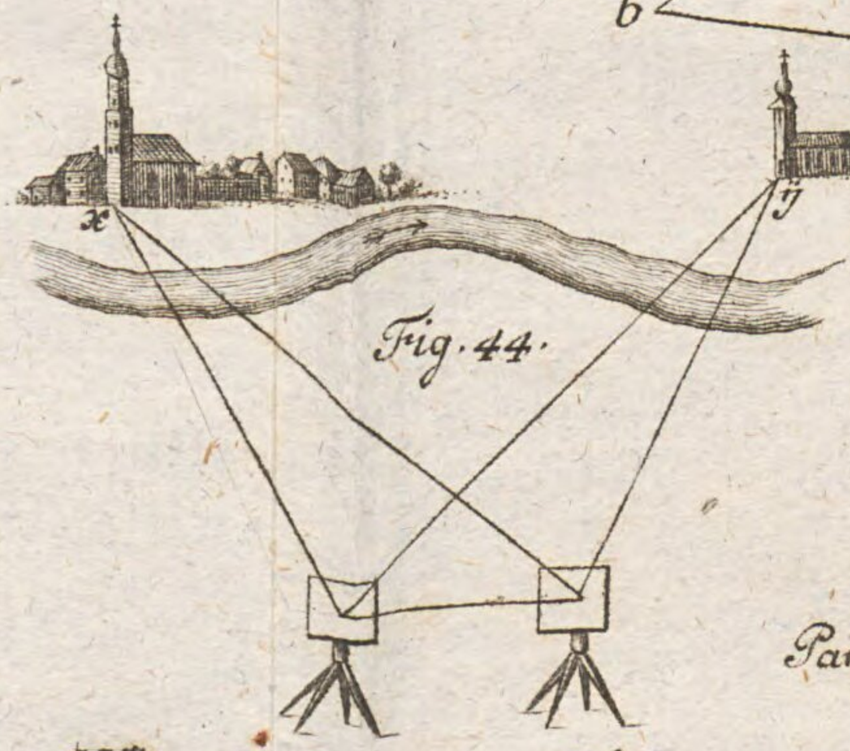
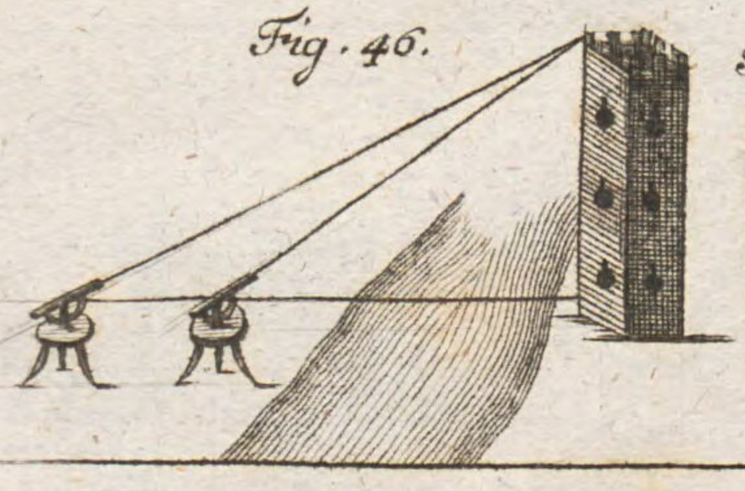


Fig. 45.

Fig. 46.



Prisma

Kubus

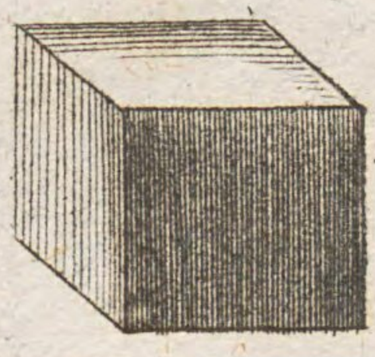
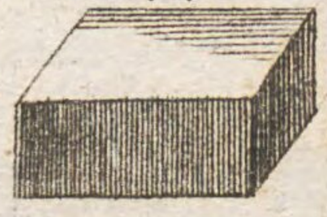


Fig. 47.

Parallelepipedum



Walz

Pyramide

Kugel

Kegel

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Der
gute
und fleißige
Junge.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Prändel, Johann Georg,

Arithmetik Ins Kurze gefaßt

München 1796

Math.p. 437 b
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082606-1
VD18 15308413-001